

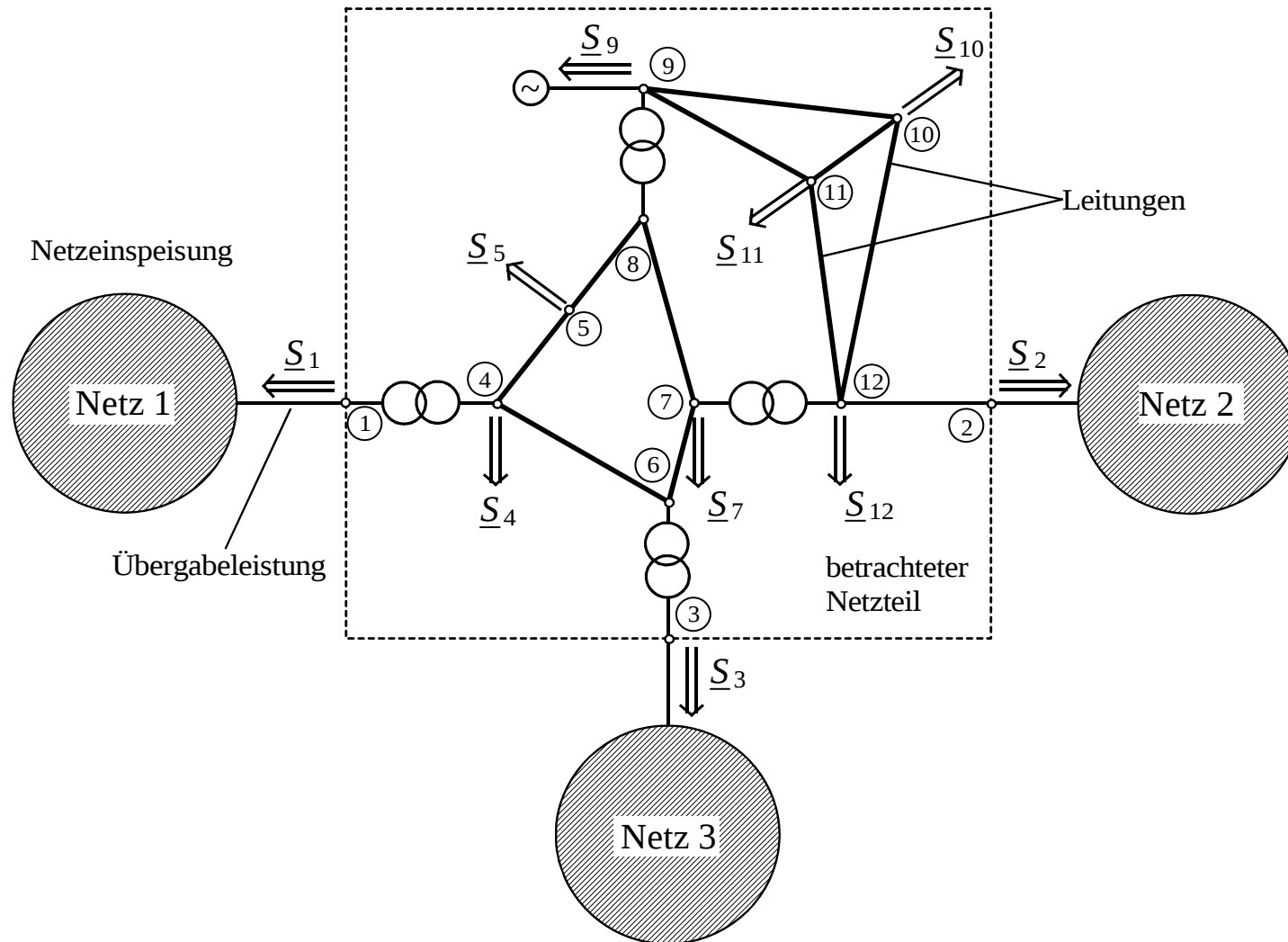
Voraussetzungen:

- Symmetrische Betriebsweise des Netzes
- vollkommen symmetrischer, dreiphasiger Aufbau der Betriebsmittel
- Keine transienten Ausgleichsvorgänge

Notwendige Schritte zur Netzberechnung:

1. Auftrennen des Netzes in einen Teilabschnitt, für den die Berechnung erfolgen soll, Vereinbarung von Übergabeleistungen an den Trennstellen
2. Erstellen des Ersatzschaltbildes
 - Nummerierung aller Knoten des Netzwerks, Festlegung eines Bezugsknotens
 - Ersetzen der Betriebsmittel durch ihre einphasigen Ersatzschaltungen
3. Normierung aller Werte auf eine Bezugsspannung U_B und eine Bezugsleistung S_B
4. Durchführen der Berechnung durch ein einfaches oder formales Verfahren

Aufbereitung des Netzes: Auftrennen des Netzes, Betrachtung eines Teilnetzes



Aufbereitung des Netzes: Normierung der Netzelemente (I)

Sinn:

- Fehlererkennung, da artgleiche Systemparameter innerhalb eines engen Toleranzbereichs liegen (Beispiel Spannung)
- Nennübersetzungen der Transformatoren sind automatisch berücksichtigt

$$\text{bezogene Größe} = \frac{\text{physikalische Größe}}{\text{Bezugsgröße}}$$

Vereinbarung:

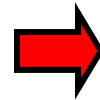
u, i, z, s : Kleinbuchstaben für bezogene Größen

U, I, Z, S : Großbuchstaben für physikalische Größen

Grundgleichungen elektrischer Netze:

Ohmsches Gesetz: $\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$

Leistungsgleichung: $\underline{S} = 3 \cdot \underline{U}_Y \cdot \underline{I}^*$



2 Bezugsgrößen:

Bezugsspannung: $\underline{U}_B$

Bezugsleistung: $\underline{S}_B$

Aufbereitung des Netzes: Normierung der Netzelemente (II)

2 Bezugsgrößen:

Bezugsspannung: $\underline{U}_{Bm}$ des Teilnetzes m Leiterspannung, d. h. verkettete Spg.

U_B ist der Nennwert der Leiterspannung des betrachteten Netzes

Bezugsleistung: $\underline{S}_B$ Drehstromleistung

Man wählt einen für die Rechnung günstigen Wert, z. B. $S_B = 100\text{MVA}$, oder man nimmt als Bezugsleistung die Scheinleistung eines wichtigen Betriebsmittels (Transformator, Generator)

Berechnung der bezogenen Werte:

$$\underline{u} = \frac{\underline{U}_{Ym}}{\left(\frac{\underline{U}_{Bm}}{\sqrt{3}}\right)} \quad \underline{i} = \frac{\underline{I}_m}{I_{Bm}} = \underline{I}_m \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot \underline{U}_{Bm}}{S_B} \quad \underline{s} = \frac{\underline{S}}{S_B} = \frac{\sqrt{3} \cdot \underline{U} \cdot \underline{I}^*}{\sqrt{3} \cdot \underline{U}_{Bm} \cdot I_{Bm}} = \underline{u} \cdot \underline{i}^* = p + j \cdot q$$

$$\underline{u} = \frac{\underline{U}_{\Delta m}}{U_{Bm}} \quad \underline{z} = \frac{\underline{Z}}{Z_{Bm}} = \underline{Z} \cdot \frac{S_B}{U_{Bm}^2}$$

Aufbereitung des Netzes: Normierung der Netzelemente (III)

Berechnung der tatsächlichen Impedanz eines Betriebsmittels:

$$\underline{Z}_A = \underline{z}_A \cdot \frac{U_{NA}^2}{S_{NA}}$$

U_{NA} : Nennwert der Leiterspannung des Betriebsmittels

S_{NA} : Nennleistung

$\underline{z}_A$: bezogene Impedanz

Berechnung der auf U_B und S_B bezogenen Impedanz:

$$\underline{z} = \frac{\underline{Z}_A}{Z_{Bm}} = \underline{z}_A \cdot \frac{U_{NA}^2}{S_{NA}} \cdot \frac{S_B}{U_{Bm}^2} = \underline{z}_A \cdot \left(\frac{U_{NA}}{U_{Bm}} \right)^2 \cdot \left(\frac{S_B}{S_{NA}} \right)$$

Transformatoren: $\underline{z}_A = j \cdot \underline{u}_k$

Generatoren: $\underline{z}_A = j \cdot x_d$ synchrone Reaktanz, im Dauerbetrieb wirksam

$\underline{z}_A = j \cdot x'_d$ transiente Reaktanz, für dynamische Stabilität wirksam

$\underline{z}_A = j \cdot x''_d$ subtransiente Reaktanz, bei Eintritt eines Kurzschlusses wirksam

Berücksichtigung einer komplexen Transformatorübersetzung:

$$\underline{\ddot{u}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{1}{k_1 \pm k_2 \cdot e^{j\alpha}}$$

Einführung der Bezugsspannungen
der beiden Netzseiten:

$$\underline{\ddot{u}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_{B1}} \cdot \frac{\underline{U}_{B2}}{\underline{U}_2} \right) \cdot \frac{\underline{U}_{B1}}{\underline{U}_{B2}} = \underline{t} \cdot \frac{\underline{U}_{B1}}{\underline{U}_{B2}}$$

Per-Unit-Übersetzung:

$$\underline{t} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \cdot \frac{\underline{U}_{B2}}{\underline{U}_{B1}} = \underline{\ddot{u}} \cdot \frac{\underline{U}_{B2}}{\underline{U}_{B1}} = \frac{1}{k_1 \pm k_2 \cdot e^{j\alpha}} \cdot \frac{\underline{U}_{B2}}{\underline{U}_{B1}}$$

Längsregeltransformatoren:

$$\underline{t} = \frac{1}{k_1 \pm k_2 \cdot e^{j\alpha}} \cdot \frac{\underline{U}_{B2}}{\underline{U}_{B1}} = \underline{\ddot{u}} \cdot e^{-jK30^\circ} \cdot \frac{\underline{U}_{B2}}{\underline{U}_{B1}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \cdot \frac{\underline{U}_{B2}}{\underline{U}_{B1}} \cdot e^{-jK30^\circ}$$

$$= \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_{2N}} \cdot \frac{\underline{U}_{B2}}{\underline{U}_{B1}} \cdot e^{-jK30^\circ} \stackrel{\underline{U}_{B2}=\underline{U}_{2N}}{=} \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_{B1}} \cdot e^{-jK30^\circ}$$

Phasendrehung $K \cdot 30^\circ$ ist fest
und verändert sich nicht
 $\Rightarrow$ kann auch weggelassen
werden

$$\underline{t} = t = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_{B1}}$$

Stufenschalter auf Nennstellung:

Bezugsspannung $\underline{U}_{B1}$ ist identisch
mit der Nennspannung $\underline{U}_{N1}$:

$$\underline{t} = t = \frac{\underline{U}_{1N}}{\underline{U}_{B1}} = 1$$

Analyseverfahren

- Überlagerungssatz
- Vereinfachung durch Stern-Dreieck-Umwandlung
- Knotenpotential-Verfahren

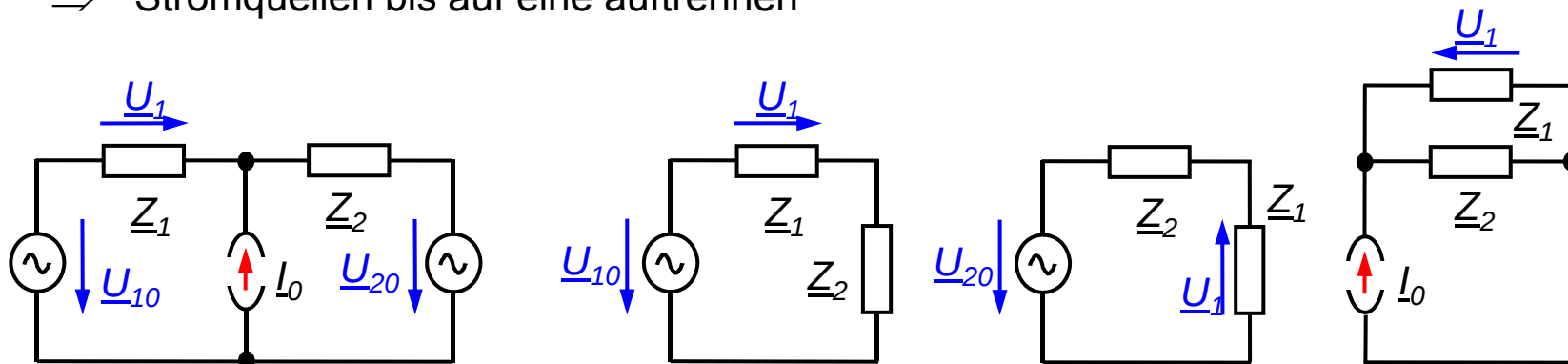
Überlagerungssatz

Wirkung einer Summe von Quellen = Addition der einzelnen Wirkungen auf die

Ursachen (Quellen)

⇒ Spannungsquellen bis auf eine kurzschließen

⇒ Stromquellen bis auf eine auftrennen



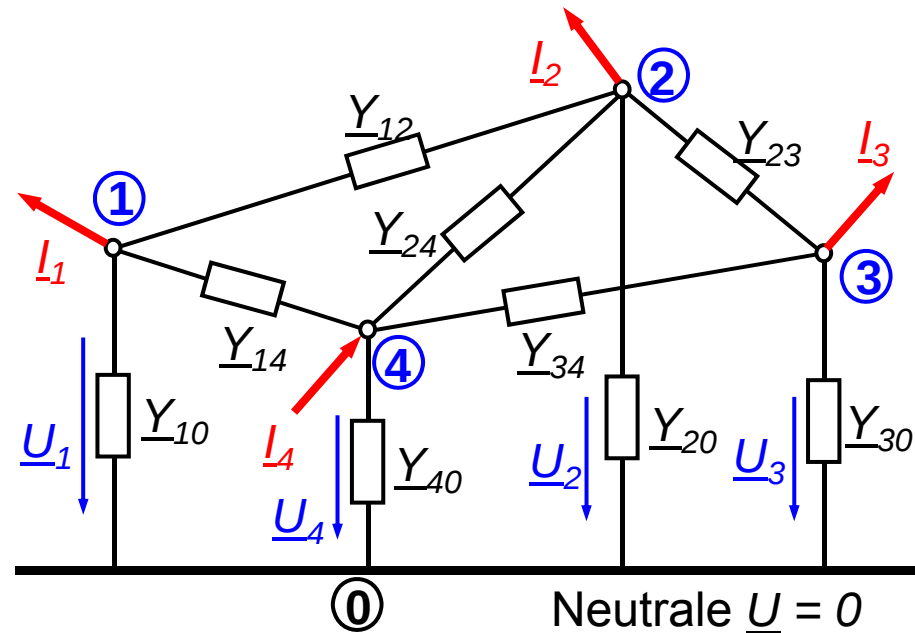
Knotenpotential-Verfahren: Vollständige Knotenadmittanzmatrix (KAM)

Schritte

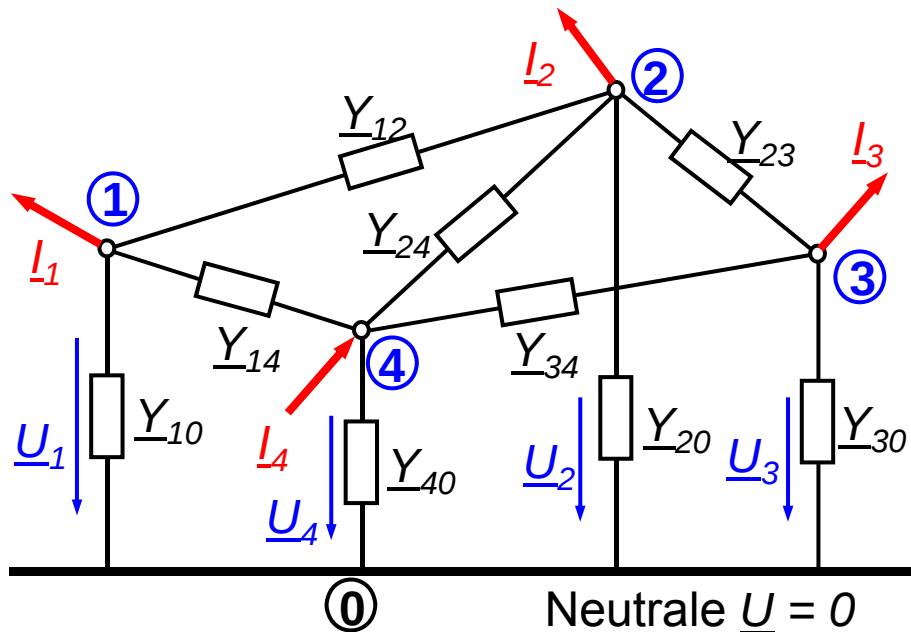
- Alle Impedanzen in Admittanzen umwandeln $\underline{Y}_{ik} = \frac{1}{\underline{Z}_{ik}}$
- Queradmittanzen von Leitungen oder Transformatoren zu einer Queradmittanz $\underline{Y}_{j0}$ am Knoten j zusammenfassen
- zu- und abfließende Ströme eintragen
Konvention (willkürlich)
zufließende Ströme: -
abfließende Ströme: +

Die inneren Ströme im Netzwerk lassen sich durch die Spannungen $\underline{u}_j$ und $\underline{u}_k$ und die Admittanzen $\underline{Y}_{jk}$ ausdrücken.

Sie treten im Gleichungssystem nicht auf.



Knotenpotential-Verfahren: Vollständige Knotenadmittanzmatrix (KAM)



$$I_4 = U_4 \cdot Y_{40} - (U_3 - U_4) \cdot Y_{34} - (U_2 - U_4) \cdot Y_{24} - (U_1 - U_4) \cdot Y_{14}$$

oder

$$-I_4 = U_4 \cdot (-Y_{40} - Y_{34} - Y_{24} - Y_{14}) + U_3 \cdot Y_{34} + U_2 \cdot Y_{24} + U_1 \cdot Y_{14}$$

Bildungsgesetz der KAM:

Diagonalelemente: $G_{ii} = -\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (Y_{ik} + Y_{i0})$

Außenelemente: G_{ik} ist die Summe aller Admittanzen vom Knoten i zum Knoten k

U_1	U_2	U_3	U_4	=
$-(Y_{10} + Y_{12} + Y_{14})$	$+Y_{12}$	0	$+Y_{14}$	I_1
$+Y_{12}$	$-(Y_{20} + Y_{12} + Y_{23} + Y_{24})$	$+Y_{23}$	$+Y_{24}$	I_2
0	$+Y_{23}$	$-(Y_{30} + Y_{23} + Y_{34})$	$+Y_{34}$	I_3
$+Y_{14}$	$+Y_{24}$	$+Y_{34}$	$-(Y_{40} + Y_{14} + Y_{24} + Y_{34})$	$-I_4$

Knotenpotential-Verfahren: Verkürzte Knotenadmittanzmatrix (VKAM)

$$\begin{pmatrix} \underline{G}_{11} & \underline{G}_{12} & \dots & \underline{G}_{1n} \\ \underline{G}_{21} & \underline{G}_{22} & \dots & \underline{G}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{G}_{n1} & \underline{G}_{n2} & \dots & \underline{G}_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \dots \\ \underline{U}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \dots \\ \underline{I}_n \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \underline{\mathbf{G}} \cdot \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{I}} \quad \underline{\mathbf{G}} = \mathbf{KAM}$$

Probleme:

- Falls die Queradmittanzen $\underline{Y}_{j0} = 0$ sind, so ist das Gleichungssystem überbestimmt, d. h. **$\det\{\mathbf{KAM}\} = 0$**
- Selbst wenn $\underline{Y}_{j0} \neq 0$ ist, so kann **$\det\{\mathbf{KAM}\} \approx 0$** sein, die Lösung des Gleichungssystems ist prinzipiell möglich, die Lösung kann in der Praxis aber stark fehlerbehaftet sein

Lösung:

Vorgabe einer Referenzspannung $u_n=1$ ($\varphi_n=0$) am Referenzknoten n

Am Referenzknoten kann keine Leistung vorgegeben werden, diese ergibt sich aus einer Lastflußberechnung, als Referenzknoten wird ein leistungsstarkes Kraftwerk ausgewählt

Knotenpotential-Verfahren:

Verkürzte Knotenadmittanzmatrix (VKAM)

Der Referenzknoten sei der Knoten n :

$$m = n - 1$$

$$\begin{pmatrix} \underline{g}_{11} & \underline{g}_{12} & \cdots & \underline{g}_{1m} & \underline{g}_{1n} \\ \underline{g}_{21} & \underline{g}_{22} & \cdots & \underline{g}_{2m} & \underline{g}_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{g}_{m1} & \underline{g}_{m2} & \cdots & \underline{g}_{mm} & \underline{g}_{mn} \\ \underline{g}_{n1} & \underline{g}_{n2} & \cdots & \underline{g}_{nm} & \underline{g}_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \\ \cdots \\ \underline{u}_m \\ \underline{u}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{i}_1 \\ \underline{i}_2 \\ \cdots \\ \underline{i}_m \\ \underline{i}_n \end{pmatrix}$$

Wenn $\underline{u}_n$ und $\underline{i}_n$ bekannt sind, so kann die letzte Gleichung weggelassen werden, da dann $m = n - 1$ Unbekannte ($u_1, \dots, u_m$) existieren, dafür werden m Gleichungen benötigt.

Daraus resultiert:

$$\begin{pmatrix} \underline{g}_{11} & \underline{g}_{12} & \cdots & \underline{g}_{1m} & \underline{g}_{1n} \\ \underline{g}_{21} & \underline{g}_{22} & \cdots & \underline{g}_{2m} & \underline{g}_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{g}_{m1} & \underline{g}_{m2} & \cdots & \underline{g}_{mm} & \underline{g}_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \\ \cdots \\ \underline{u}_m \\ \underline{u}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{i}_1 \\ \underline{i}_2 \\ \cdots \\ \underline{i}_m \\ \underline{i}_n \end{pmatrix}$$

Problem:

Die reduzierte KAM ist nicht mehr symmetrisch, d. h. die Matrix-Inversion ist nicht möglich

Knotenpotential-Verfahren:

Verkürzte Knotenadmittanzmatrix (VKAM)

Die Symmetrie kann auf mehrere Arten erzeugt werden:

1. Die Anteile $\underline{g}_{in} \cdot \underline{u}_n$ werden auf die rechte Seite gebracht

$$\begin{pmatrix} \underline{g}_{11} & \underline{g}_{12} & \cdots & \underline{g}_{1m} \\ \underline{g}_{21} & \underline{g}_{22} & \cdots & \underline{g}_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{g}_{m1} & \underline{g}_{m2} & \cdots & \underline{g}_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \\ \cdots \\ \underline{u}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{i}_1 \\ \underline{i}_2 \\ \cdots \\ \underline{i}_m \end{pmatrix} - \underline{u}_n \cdot \begin{pmatrix} \underline{g}_{1n} \\ \underline{g}_{2n} \\ \cdots \\ \underline{g}_{mn} \end{pmatrix}$$

2. Eine bessere Variante erhält man durch Betrachtung der Zeile i in obiger Gleichung:

$$\begin{aligned} & \underline{u}_1 \cdot \underline{g}_{i1} + \underline{u}_2 \cdot \underline{g}_{i2} + \underline{u}_3 \cdot \underline{g}_{i3} + \cdots + \underline{u}_m \cdot \underline{g}_{im} \\ &= \underline{i}_i - \underline{u}_n \cdot \underline{g}_{in} \\ &= \underline{i}_i + \underbrace{\underline{u}_n \cdot (\underline{g}_{i1} + \underline{g}_{i2} + \underline{g}_{i3} + \cdots + \underline{g}_{im})}_{\text{red bracket}} + \underline{u}_n \cdot \underline{y}_{i0} \quad \text{mit } i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

Dies lässt sich durch Betrachtung eines konkreten Beispiels verifizieren

Knotenpotential-Verfahren: Verkürzte Knotenadmittanzmatrix (VKAM)

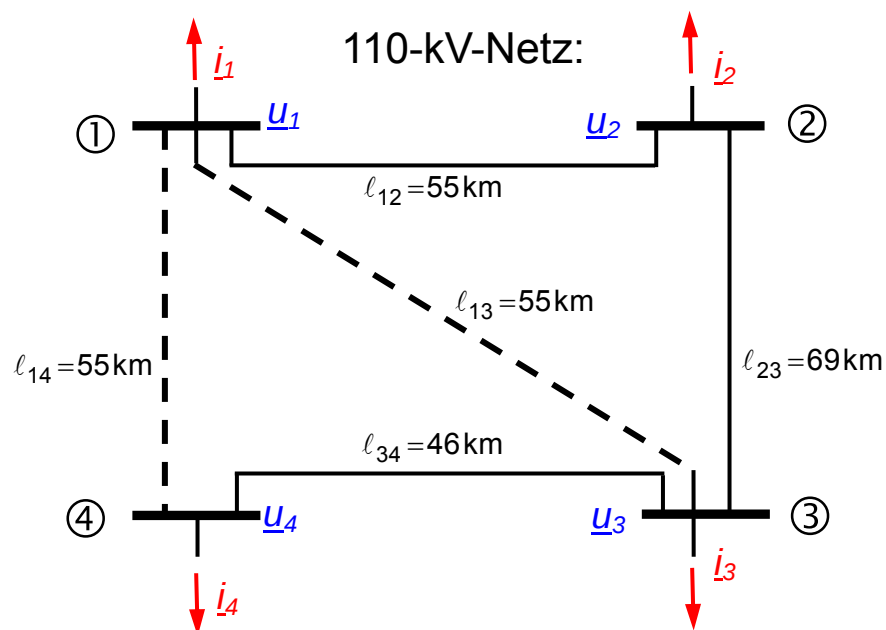
Damit erhält man:

$$\begin{pmatrix} \underline{g}_{11} & \underline{g}_{12} & \cdots & \underline{g}_{1m} \\ \underline{g}_{21} & \underline{g}_{22} & \cdots & \underline{g}_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{g}_{m1} & \underline{g}_{m2} & \cdots & \underline{g}_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{u}_1 - \underline{u}_n \\ \underline{u}_2 - \underline{u}_n \\ \cdots \\ \underline{u}_m - \underline{u}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{i}_1 \\ \underline{i}_2 \\ \cdots \\ \underline{i}_m \end{pmatrix} + \underline{u}_n \cdot \begin{pmatrix} \underline{y}_{10} \\ \underline{y}_{20} \\ \cdots \\ \underline{y}_{m0} \end{pmatrix}$$

oder

$$\underline{g}_V \cdot (\underline{u}_V - \underline{u}_n) = \underline{i}_V + \underline{u}_n \cdot \underline{y}_0$$

Verkürzte Knotenadmittanzmatrix (VKAM): Beispiel (I)



— Einfachleitung

- - - Doppelleitung

- Leiterimpedanz: $Z' = (0,157 + j0,410) \Omega/\text{km}$
- Bezugsspannung: $U_B = 110 \text{ kV}$
- Bezugsleistung: $S_B = 100 \text{ MVA}$
- Knoten 4 ist der Potentialknoten mit $u_4 = 1$

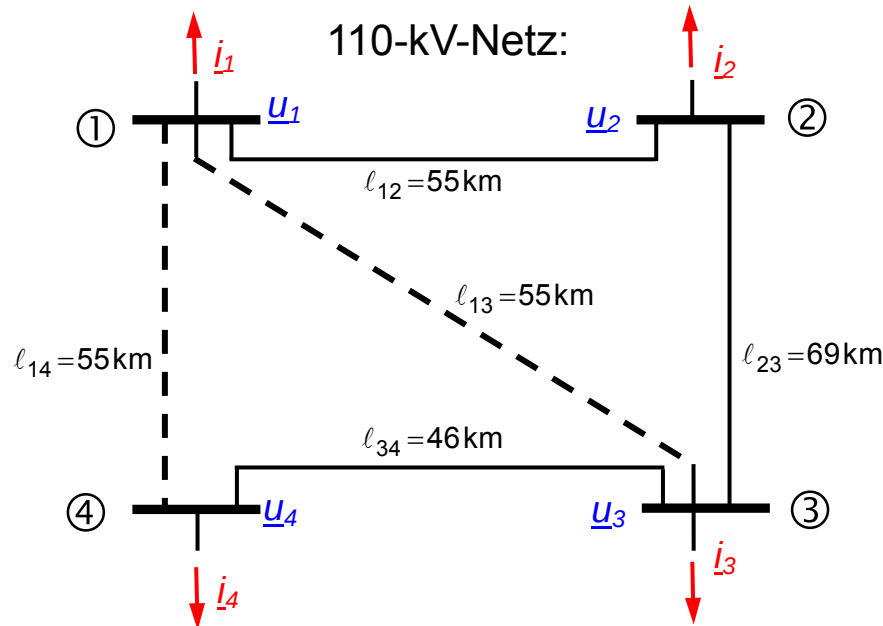
$$\begin{aligned} \underline{Z}_{12} &= \frac{\underline{Z}_{12}}{Z_{Bm}} = \underline{Z}_{12} \cdot \frac{S_B}{U_{Bm}^2} = (0,157 + j0,410) \frac{\Omega}{\text{km}} \cdot 55 \text{ km} \cdot \frac{100 \text{ MVA}}{(110 \text{ kV})^2} \\ &= 0,0714 + j0,1864 = 0,19961 e^{j69,047^\circ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{23} &= \frac{\underline{Z}_{23}}{Z_{Bm}} = \underline{Z}_{23} \cdot \frac{S_B}{U_{Bm}^2} = (0,157 + j0,410) \frac{\Omega}{\text{km}} \cdot 69 \text{ km} \cdot \frac{100 \text{ MVA}}{(110 \text{ kV})^2} \\ &= 0,0895 + j0,2338 = 0,25035 e^{j69,047^\circ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{13} &= \frac{\underline{Z}_{13}}{Z_{Bm}} = \underline{Z}_{13} \cdot \frac{S_B}{U_{Bm}^2} = \frac{1}{2} (0,157 + j0,410) \frac{\Omega}{\text{km}} \cdot 55 \text{ km} \cdot \frac{100 \text{ MVA}}{(110 \text{ kV})^2} \\ &= 0,0357 + j0,0932 = 0,0998 e^{j69,047^\circ} = \underline{Z}_{13} = \underline{Z}_{14} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{34} &= \frac{\underline{Z}_{34}}{Z_{Bm}} = \underline{Z}_{34} \cdot \frac{S_B}{U_{Bm}^2} = (0,157 + j0,410) \frac{\Omega}{\text{km}} \cdot 46 \text{ km} \cdot \frac{100 \text{ MVA}}{(110 \text{ kV})^2} \\ &= 0,0597 + j0,1559 = 0,16694 e^{j69,047^\circ} \end{aligned}$$

Verkürzte Knotenadmittanzmatrix (VKAM): Beispiel (II)



$$\underline{y}_{12} = 5 \cdot e^{-j69,047^\circ}$$

$$\underline{y}_{13} = \underline{y}_{14} = 10 \cdot e^{-j69,047^\circ}$$

$$\underline{y}_{23} = 4 \cdot e^{-j69,047^\circ}$$

$$\underline{y}_{34} = 6 \cdot e^{-j69,047^\circ}$$

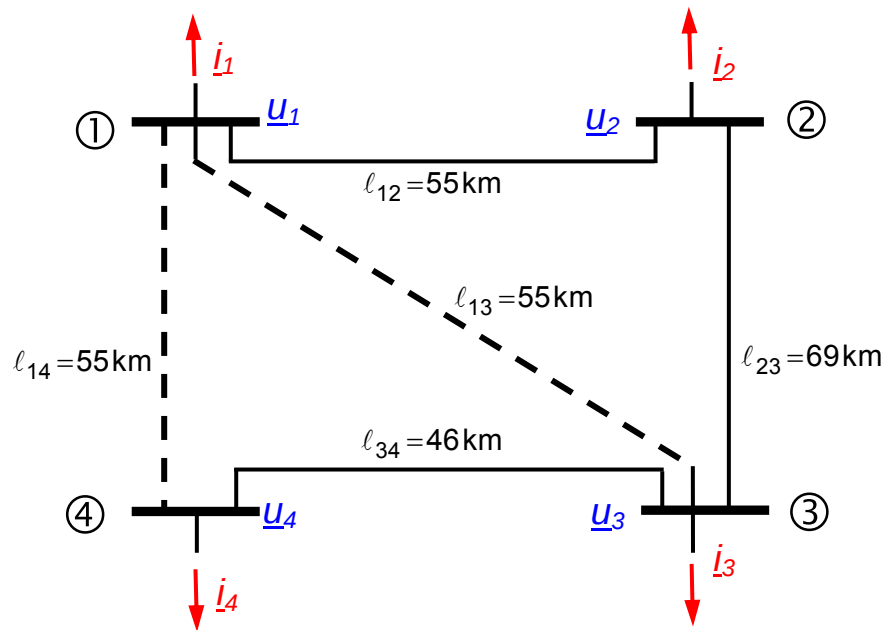
$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} -(\underline{y}_{12} + \underline{y}_{13} + \underline{y}_{14}) & \underline{y}_{12} & \underline{y}_{13} & \underline{y}_{14} \\ \underline{y}_{12} & -(\underline{y}_{12} + \underline{y}_{23}) & \underline{y}_{23} & 0 \\ \underline{y}_{13} & \underline{y}_{23} & -(\underline{y}_{13} + \underline{y}_{23} + \underline{y}_{34}) & \underline{y}_{34} \\ \underline{y}_{14} & 0 & \underline{y}_{34} & -(\underline{y}_{14} + \underline{y}_{34}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -25 & 5 & 10 & 10 \\ 5 & -9 & 4 & 0 \\ 10 & 4 & -20 & 6 \\ 10 & 0 & 6 & -16 \end{pmatrix} \cdot e^{-j69,047^\circ}$$

$$\underline{g}_V = \begin{pmatrix} -(\underline{y}_{12} + \underline{y}_{13} + \underline{y}_{14}) & \underline{y}_{12} & \underline{y}_{13} \\ \underline{y}_{12} & -(\underline{y}_{12} + \underline{y}_{23}) & \underline{y}_{23} \\ \underline{y}_{13} & \underline{y}_{23} & -(\underline{y}_{13} + \underline{y}_{23} + \underline{y}_{34}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -25 & 5 & 10 \\ 5 & -9 & 4 \\ 10 & 4 & -20 \end{pmatrix} \cdot e^{-j69,047^\circ}$$

Verkürzte Knotenadmittanzmatrix (VKAM): Beispiel (III)



— Einfachleitung

- - - Doppelleitung

$$\underline{g}_V \cdot (\underline{u}_V - \underline{u}_n) = \underline{i}_V + \underline{u}_n \cdot \underline{y}_0$$

$$\underline{y}_0 = 0 \quad \underline{g}_V \cdot (\underline{u}_V - \underline{u}_n) = \underline{i}_V$$

$$\underline{g}_V^{-1} = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 7,1304 & 6,0870 & 4,7826 \\ 6,0870 & 17,3913 & 6,5217 \\ 4,7826 & 6,5217 & 8,6957 \end{pmatrix} \cdot e^{j69,047}$$

Ergebnis:

Vorgabe:

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300+j50 \\ 100 \\ 200+j20 \end{pmatrix} \text{ A}$$

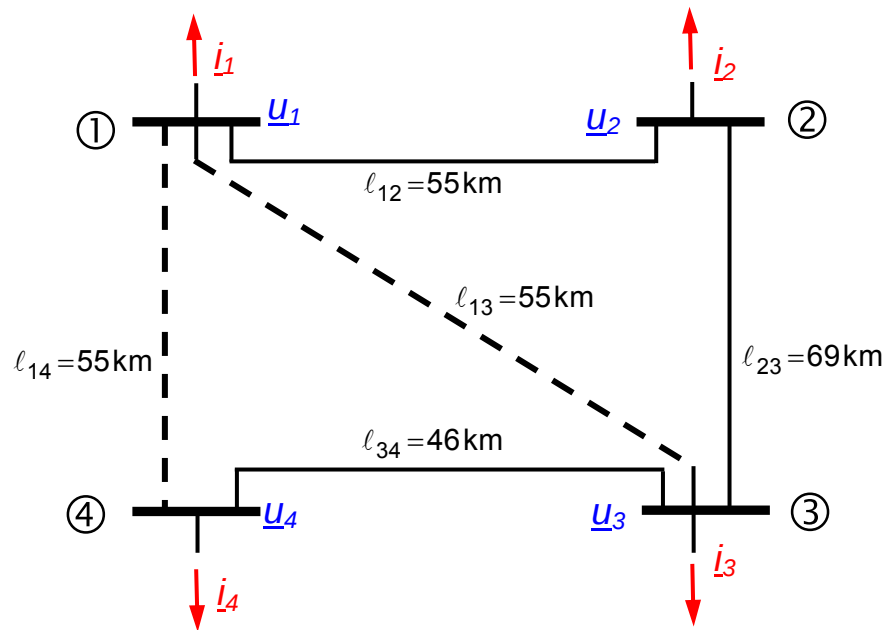
oder

$$\underline{i}_V = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot U_B}{S_B} = \begin{pmatrix} 300+j50 \\ 100 \\ 200+j20 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot 110000}{100 \cdot 10^6} = \begin{pmatrix} 0,5716+j0,0953 \\ 0,1905 \\ 0,3811+j0,03811 \end{pmatrix}$$

$$\underline{u}_V = \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \\ \underline{u}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \\ \underline{u}_3 \end{pmatrix} \cdot U_B = \begin{pmatrix} 0,9667-j0,0628 \\ 0,9591-j0,0837 \\ 0,9666-j0,0653 \end{pmatrix} \cdot 110 \text{ kV}$$

$$= \begin{pmatrix} 106,5631 e^{-j3,7186^\circ} \\ 105,9003 e^{-j4,9864^\circ} \\ 106,5662 e^{-j3,8627^\circ} \end{pmatrix} \text{ kV}$$

Verkürzte Knotenadmittanzmatrix (VKAM): Beispiel (IV)



Interessant:

Betrachtung der Queradmittanzen bei Freileitungen

110-kV-Freileitung: $C_B' = 9 \text{ nF/km}$

$\underline{Y}_B' = j \cdot 2,83 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}(\Omega \cdot \text{km})$ oder $\underline{y}_B' = j \cdot 3,42 \cdot 10^{-4} \text{ 1/km}$

69 km lange Freileitung: $\underline{y}_B = j \cdot 0,0236$

Strom am Referenzknoten aus der letzten Gleichung der KAM:

$$\underline{i}_4 = \underline{u}_1 \cdot \underline{y}_{14} + \underline{u}_3 \cdot \underline{y}_{34} - \underline{u}_4 \cdot (\underline{y}_{14} + \underline{y}_{34}) = -1,1432 + j0,1334$$

oder

$$\underline{I}_4 = \underline{i}_4 \cdot \underline{I}_B = \underline{i}_4 \cdot \frac{S_B}{\sqrt{3} \cdot U_B} = (-1,1432 + j0,1334) \cdot \frac{100 \text{ MVA}}{\sqrt{3} \cdot 110 \text{ kV}} = -(600 + j70) \text{ A}$$

Aufgrund der fehlenden Queradmittanzen ist die Berechnung über Stromsumme einfacher:

$$\underline{I}_4 = -(\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3) = -[(300 + j50) \text{ A} + (100) \text{ A} + (200 + j20) \text{ A}] = -(600 + j70) \text{ A}$$

$$\underline{y}_{12} = 5 \cdot e^{-j69,047^\circ}$$

$$\underline{y}_{13} = \underline{y}_{14} = 10 \cdot e^{-j69,047^\circ}$$

$$\underline{y}_{23} = 4 \cdot e^{-j69,047^\circ}$$

$$\underline{y}_{34} = 6 \cdot e^{-j69,047^\circ}$$

Behandlung von Transformatoren mit der komplexen Übersetzung $\underline{\ddot{u}}$ (I)

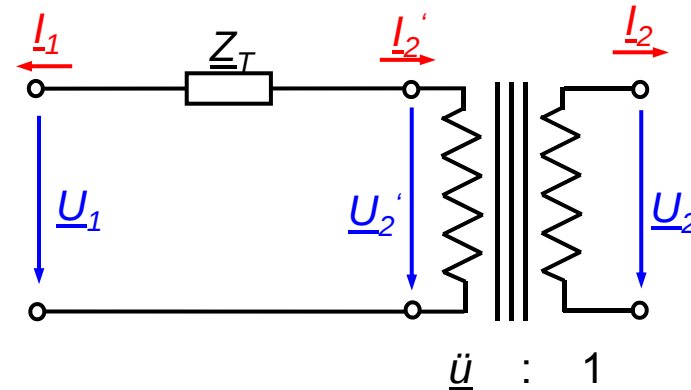
Transformatoren werden berücksichtigt durch

- Relative Kurzschlußimpedanz

$$\underline{Z}_T = \underline{u}_k \cdot \frac{U_{1N}^2}{S_N}$$

- Komplexe Übersetzung

$$\underline{\ddot{u}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \quad \text{und speziell} \quad \underline{\ddot{u}}_N = \frac{U_{1N}}{U_{2N}}$$



Direkt aus der Schaltung ablesbar:

$$I_1 = (\underline{U}_2' - \underline{U}_1) \cdot \underline{Y}_T$$

$$I_2' = (-\underline{U}_2' + \underline{U}_1) \cdot \underline{Y}_T$$

oder

$$\begin{pmatrix} -\underline{Y}_T & \underline{Y}_T \\ \underline{Y}_T & -\underline{Y}_T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2' \end{pmatrix}$$

$$\frac{\underline{U}_2'}{\underline{U}_2} = \underline{\ddot{u}} \quad \frac{I_2'}{I_2} = \frac{1}{\underline{\ddot{u}}^*}$$

$$\begin{pmatrix} -\underline{y}_T & \underline{t} \cdot \underline{y}_T \\ \underline{t}^* \cdot \underline{y}_T & -\underline{t}^2 \cdot \underline{y}_T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{i}_1 \\ \underline{i}_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \underline{t}^2 = |\underline{t}|^2$$

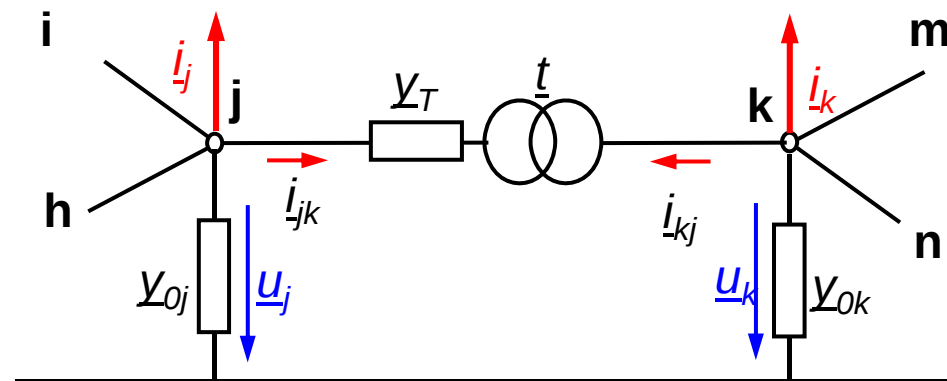
$$\underline{t} = \underline{\ddot{u}} \cdot \frac{U_{B2}}{U_{B1}}$$

$$\begin{pmatrix} -\underline{Y}_T & \underline{\ddot{u}} \cdot \underline{Y}_T \\ \underline{\ddot{u}}^* \cdot \underline{Y}_T & -\underline{\ddot{u}}^2 \cdot \underline{Y}_T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Behandlung von Transformatoren mit der komplexen Übersetzung $\underline{t}$ (II)

$\underline{t} = t = 1$ tritt auf, wenn

- keine (variable) Phasendrehung der Spannungen $\underline{U}_1$ und $\underline{U}_2$ vorliegt
- die Leerlaufspannungen U_1 und U_2 mit den jeweiligen Bezugsspannungen U_{B1} und U_{B2} identisch sind



Modifikation der KAM:

...	$\underline{u}_j$	$\underline{u}_k$	...	=
...	...	...	...	...
...	$-(\underline{y}_{ji} + \underline{y}_{jh} + \underline{y}_{0j} + \underline{y}_T)$	$\underline{t} \cdot \underline{y}_T$	...	$\underline{i}_j$
...	$\underline{t}^* \cdot \underline{y}_T$	$-(\underline{y}_{km} + \underline{y}_{kn} + \underline{y}_{0k} + \underline{t}^2 \cdot \underline{y}_T)$	...	$\underline{i}_k$
...	...	...	...	...

Behandlung von Transformatoren mit der komplexen Übersetzung $\underline{t}$ (III)

...	$\underline{u}_j$	$\underline{u}_k$	...	=
...	...	...	...	...
...	$-\left(\underline{y}_{ji} + \underline{y}_{jh} + \underline{y}_{0j} + \underline{y}_T\right)$	$t \cdot \underline{y}_T$	...	$\underline{i}_j$
...	$t \cdot \underline{y}_T$	$-\left(\underline{y}_{km} + \underline{y}_{kn} + \underline{y}_{0k} + t^2 \cdot \underline{y}_T\right)$	...	$\underline{i}_k$
...	...	...	...	...

Sonderfall: $\underline{t} = t$

$$\underline{y}_1 + \underline{y}_2 = \underline{y}_T$$

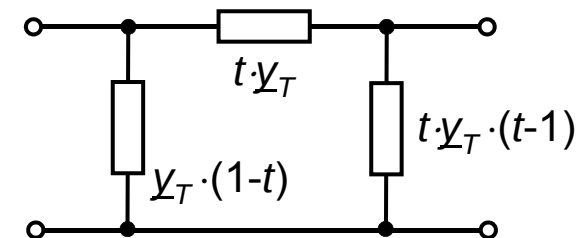
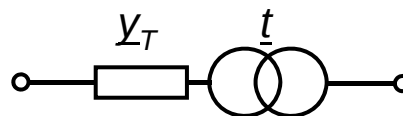
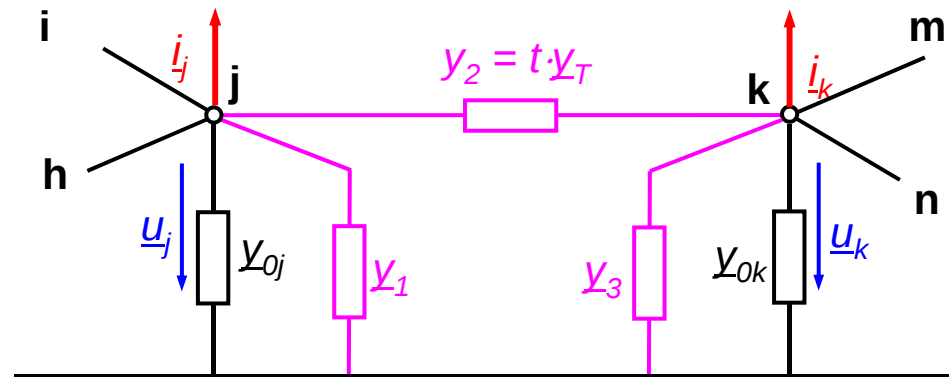
$\Rightarrow$

$$\underline{y}_1 = \underline{y}_T - \underline{y}_2 = \underline{y}_T - t \cdot \underline{y}_T = \underline{y}_T \cdot (1-t)$$

$$\underline{y}_2 + \underline{y}_3 = t^2 \cdot \underline{y}_T$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \underline{y}_3 &= t^2 \cdot \underline{y}_T - \underline{y}_2 = t^2 \cdot \underline{y}_T - t \cdot \underline{y}_T \\ &= t \cdot \underline{y}_T \cdot (t-1) \end{aligned}$$



Behandlung von Transformatoren mit der komplexen Übersetzung $\underline{\dot{u}}$ (III)

Modifikation des Vektors $\underline{y}_0$:

folgt für die Zeile j:

$$\underline{u}_1 \cdot \underline{g}_{j1} + \underline{u}_2 \cdot \underline{g}_{j2} + \dots + \underline{u}_j \cdot \underline{g}_{jj} + \underline{u}_k \cdot \underline{g}_{jk} + \dots + \underline{u}_m \cdot \underline{g}_{jm}$$

$$= \underline{i}_j - \underline{u}_n \cdot \underline{g}_{jn}$$

$$= \underline{i}_j + \underline{u}_n \cdot (\underline{g}_{j1} + \underline{g}_{j2} + \dots + \underline{g}_{jj} + \underline{g}_{jk} + \dots + \underline{g}_{jm}) + \underline{u}_n \cdot (\underline{y}_{j0} + \underline{y}_T - \underline{t} \cdot \underline{y}_T)$$

$$\underline{u}_1 \cdot \underline{g}_{k1} + \underline{u}_2 \cdot \underline{g}_{k2} + \dots + \underline{u}_j \cdot \underline{g}_{kj} + \underline{u}_k \cdot \underline{g}_{kk} + \dots + \underline{u}_m \cdot \underline{g}_{km}$$

$$= \underline{i}_k - \underline{u}_n \cdot \underline{g}_{kn}$$

$$= \underline{i}_k + \underline{u}_n \cdot (\underline{g}_{k1} + \underline{g}_{k2} + \dots + \underline{g}_{kj} + \underline{g}_{kk} + \dots + \underline{g}_{km}) + \underline{u}_n \cdot (\underline{y}_{k0} + \underline{t}^2 \cdot \underline{y}_T - \underline{t}^* \cdot \underline{y}_T)$$

Aus der modifizierten KAM:

$$\underline{g}_{j1} + \underline{g}_{j2} + \underline{g}_{j3} + \dots + \underline{g}_{jm} + \underline{g}_{jn} = -\underline{y}_{j0} - \underline{y}_T + \underline{t} \cdot \underline{y}_T$$

und

$$\underline{g}_{k1} + \underline{g}_{k2} + \underline{g}_{k3} + \dots + \underline{g}_{km} + \underline{g}_{kn} = -\underline{y}_{k0} - \underline{t}^2 \cdot \underline{y}_T + \underline{t}^* \cdot \underline{y}_T$$

Aus: $\underline{g}_V \cdot \underline{u}_V = \underline{i}_V - \underline{u}_n \cdot \underline{g}_n$

$$\underline{g}_V \cdot (\underline{u}_V - \underline{u}_n) = \underline{i}_V + \underline{u}_n \cdot \underline{y}_0$$

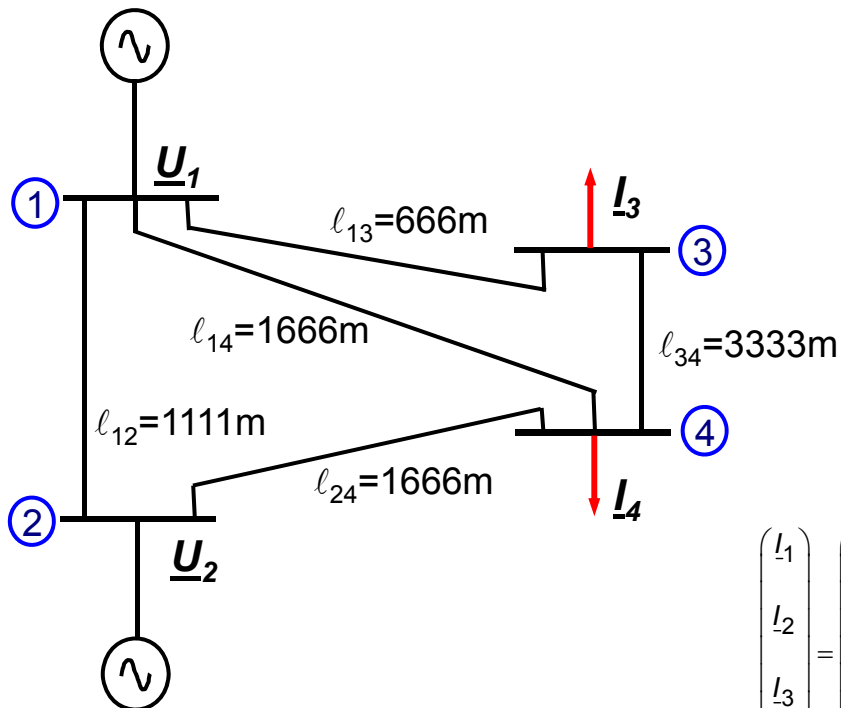
$$\underline{y}_0 = \begin{pmatrix} \underline{y}_{10} \\ \underline{y}_{20} \\ \dots \\ \underline{y}_{j0} + \underline{y}_T \cdot (1 - \underline{t}) \\ \underline{y}_{k0} + \underline{y}_T \cdot \underline{t}^* \cdot (\underline{t} - 1) \\ \dots \\ \underline{y}_{m0} \end{pmatrix}$$

Hybridprobleme und ihre Lösung mit Hilfe der Hybridmatrix (I)

Bisher: Entweder waren

- alle Ströme oder
- alle Spannungen bekannt

Oft in der Praxis: gemischtes Problem, ein Teil der Ströme und ein Teil der Spannungen sind bekannt



$\underline{Y}$	Ω^{-1}
$\underline{Y}_{12}$	$3 \cdot e^{-j(\pi/2)}$
$\underline{Y}_{13}$	$5 \cdot e^{-j(\pi/2)}$
$\underline{Y}_{14}$	$2 \cdot e^{-j(\pi/2)}$
$\underline{Y}_{24}$	$2 \cdot e^{-j(\pi/2)}$
$\underline{Y}_{34}$	$1 \cdot e^{-j(\pi/2)}$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\underline{Y}_{12} + \underline{Y}_{13} + \underline{Y}_{14}) & \underline{Y}_{12} & \underline{Y}_{13} & \underline{Y}_{14} \\ \underline{Y}_{12} & -(\underline{Y}_{12} + \underline{Y}_{24}) & 0 & \underline{Y}_{24} \\ \underline{Y}_{13} & 0 & -(\underline{Y}_{13} + \underline{Y}_{34}) & \underline{Y}_{34} \\ \underline{Y}_{14} & \underline{Y}_{24} & \underline{Y}_{34} & -(\underline{Y}_{14} + \underline{Y}_{24} + \underline{Y}_{34}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \\ \underline{U}_4 \end{pmatrix}$$

Hybridprobleme und ihre Lösung mit Hilfe der Hybridmatrix (II)

Mit den Zahlenwerten des Beispiels:

$$\begin{pmatrix} -10 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & -5 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \\ \underline{U}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{I}_4 \end{pmatrix}$$

Nun:

3. Gleichung nach $\underline{U}_3$ auflösen und in die anderen Gleichungen einsetzen liefert

$$\begin{pmatrix} -\frac{35}{6} \cdot e^{-j\varphi} & 3 \cdot e^{-j\varphi} & -\frac{5}{6} & \frac{17}{6} \cdot e^{-j\varphi} \\ 3 \cdot e^{-j\varphi} & -5 \cdot e^{-j\varphi} & 0 & 2 \cdot e^{-j\varphi} \\ \frac{5}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \cdot e^{-j\varphi} & \frac{1}{6} \\ \frac{17}{6} \cdot e^{-j\varphi} & 2 \cdot e^{-j\varphi} & -\frac{1}{6} & -\frac{29}{6} \cdot e^{-j\varphi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{U}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{U}_3 \\ \underline{I}_4 \end{pmatrix}$$

4. Gleichung nach $\underline{U}_4$ auflösen und in die anderen Gleichungen einsetzen liefert

$$\frac{1}{29} \begin{pmatrix} -121 \cdot e^{-j\varphi} & 121 \cdot e^{-j\varphi} & -27 & -17 \\ 121 \cdot e^{-j\varphi} & -121 \cdot e^{-j\varphi} & -2 & -12 \\ 27 & 2 & -5 \cdot e^{j\varphi} & -e^{j\varphi} \\ 17 & 12 & -e^{j\varphi} & -6 \cdot e^{j\varphi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{I}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{U}_3 \\ \underline{U}_4 \end{pmatrix}$$

Hybridmatrix: Partielle Inversion

$$\underline{G} = \begin{pmatrix} \underline{G}_{11} & \underline{G}_{12} & \underline{G}_{13} & \underline{G}_{14} \\ \underline{G}_{21} & \underline{G}_{22} & \underline{G}_{23} & \underline{G}_{24} \\ \underline{G}_{31} & \underline{G}_{32} & \underline{G}_{33} & \underline{G}_{34} \\ \underline{G}_{41} & \underline{G}_{42} & \underline{G}_{43} & \underline{G}_{44} \end{pmatrix}$$

Pivotspalte

Pivotelement

Pivotzeile

$$\underline{H} = \begin{pmatrix} \underline{G}_{11} - \frac{\underline{G}_{13} \cdot \underline{G}_{31}}{\underline{G}_{33}} & \underline{G}_{12} - \frac{\underline{G}_{13} \cdot \underline{G}_{32}}{\underline{G}_{33}} & \underline{G}_{13} \cdot \frac{1}{\underline{G}_{33}} & \underline{G}_{14} - \frac{\underline{G}_{13} \cdot \underline{G}_{34}}{\underline{G}_{33}} \\ \underline{G}_{21} - \frac{\underline{G}_{23} \cdot \underline{G}_{31}}{\underline{G}_{33}} & \underline{G}_{22} - \frac{\underline{G}_{23} \cdot \underline{G}_{32}}{\underline{G}_{33}} & \underline{G}_{23} \cdot \frac{1}{\underline{G}_{33}} & \underline{G}_{24} - \frac{\underline{G}_{23} \cdot \underline{G}_{34}}{\underline{G}_{33}} \\ -\underline{G}_{31} \cdot \frac{1}{\underline{G}_{33}} & -\underline{G}_{32} \cdot \frac{1}{\underline{G}_{33}} & \frac{1}{\underline{G}_{33}} & -\underline{G}_{34} \cdot \frac{1}{\underline{G}_{33}} \\ \underline{G}_{41} - \frac{\underline{G}_{43} \cdot \underline{G}_{31}}{\underline{G}_{33}} & \underline{G}_{42} - \frac{\underline{G}_{43} \cdot \underline{G}_{32}}{\underline{G}_{33}} & \underline{G}_{43} \cdot \frac{1}{\underline{G}_{33}} & \underline{G}_{44} - \frac{\underline{G}_{43} \cdot \underline{G}_{34}}{\underline{G}_{33}} \end{pmatrix}$$

1. Ersetze das zu invertierende Diagonalelement (Pivotelement) durch seinen Reziprokwert,
2. Multipliziere alle nichtdiagonalen Elemente der Pivotspalte mit dem Reziprokwert Pivotelements,
3. Multipliziere alle nichtdiagonalen Elemente der Pivotzeile mit dem negativen Reziprokwert Pivotelements,

4. Subtrahiere von jedem außerhalb der Pivotzeile und -spalte liegenden Element das Produkt der zugehörigen Elemente in der Pivotzeile und der Pivotspalte dividiert durch das zu invertierende Pivotelement.

Leistungsflußberechnung: Leistungsgleichungen (I)

Leistung an den Knotenpunkten

$$\underline{s}_i = \underline{u}_i \cdot \underline{i}_i^* \quad \text{mit} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

oder

$$\underline{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \underline{u}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \underline{u}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \underline{u}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{i}_1^* \\ \underline{i}_2^* \\ \vdots \\ \underline{i}_n^* \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{u}}_{diag} \cdot \underline{\mathbf{i}}^*$$

Mit

$$\underline{\mathbf{i}} = \underline{\mathbf{g}} \cdot \underline{\mathbf{u}}$$

folgt

$$\underline{\mathbf{s}} = \underline{\mathbf{u}}_{diag} \cdot \underline{\mathbf{g}}^* \cdot \underline{\mathbf{u}}^* = \begin{pmatrix} \underline{u}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \underline{u}_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \underline{u}_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{g}_{11}^* & \underline{g}_{12}^* & \dots & \underline{g}_{1n}^* \\ \underline{g}_{21}^* & \underline{g}_{22}^* & \dots & \underline{g}_{2n}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{g}_{n1}^* & \underline{g}_{n2}^* & \dots & \underline{g}_{nn}^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{u}_1^* \\ \underline{u}_2^* \\ \dots \\ \underline{u}_n^* \end{pmatrix}$$

Die Leistung an den Knotenpunkten kann auch so geschrieben werden:

$$\underline{s}_i = \underline{u}_i \sum_{k=1}^n \underline{g}_{ik}^* \cdot \underline{u}_k^* \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{mit} \quad \underline{u}_i = u_i \cdot e^{j\varphi_i} \quad \underline{u}_k^* = u_k \cdot e^{-j\varphi_k} \quad \underline{g}_{ik}^* = g_{ik} \cdot e^{-j\alpha_{ik}} = G_{ik} - jB_{ik}$$

Leistungsflußberechnung: Leistungsgleichungen (II)

$$\underline{s}_i = \underline{u}_i \sum_{k=1}^n \underline{g}_{ik}^* \cdot \underline{u}_k^* \quad \text{mit} \quad \underline{u}_i = u_i \cdot e^{j\varphi_i} \quad \underline{u}_k^* = u_k \cdot e^{-j\varphi_k} \quad \underline{g}_{ik}^* = g_{ik} \cdot e^{-j\alpha_{ik}} = G_{ik} - jB_{ik} \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Die Leistung an den Knotenpunkten kann auch so geschrieben werden:

kartesische Koordinaten:

$$\begin{aligned} \underline{s}_i &= u_i \cdot \left[\sum_{k=1}^n u_k \cdot (G_{ik} - jB_{ik}) \cdot e^{j\varphi_i} \cdot e^{-j\varphi_k} \right] = u_i \cdot \left[\sum_{k=1}^n u_k \cdot (G_{ik} - jB_{ik}) \cdot e^{j(\varphi_i - \varphi_k)} \right] \quad \text{mit} \quad i = 1, 2, \dots, n \\ &= u_i \cdot \left[\sum_{k=1}^n u_k \cdot \left[(G_{ik} \cdot \cos(\varphi_i - \varphi_k) + B_{ik} \cdot \sin(\varphi_i - \varphi_k)) + j(G_{ik} \cdot \sin(\varphi_i - \varphi_k) - B_{ik} \cdot \cos(\varphi_i - \varphi_k)) \right] \right] \end{aligned}$$

Polarkoordinaten:

$$\underline{s}_i = u_i \cdot \left[\sum_{k=1}^n g_{ik} \cdot u_k \cdot e^{j\varphi_i} \cdot e^{-j\varphi_k} \cdot e^{-j\alpha_{ik}} \right] = u_i \cdot \left[\sum_{k=1}^n g_{ik} \cdot u_k \cdot e^{j(\varphi_i - \varphi_k - \alpha_{ik})} \right] \quad \text{mit} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\begin{aligned} p_i &= \operatorname{Re}\{\underline{s}_i\} = u_i \cdot \left[\sum_{k=1}^n g_{ik} \cdot u_k \cdot \cos(\varphi_i - \varphi_k - \alpha_{ik}) \right] \\ q_i &= \operatorname{Im}\{\underline{s}_i\} = u_i \cdot \left[\sum_{k=1}^n g_{ik} \cdot u_k \cdot \sin(\varphi_i - \varphi_k - \alpha_{ik}) \right] \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Leistungsflußberechnung: Art der verschiedenen Netzknoten

Jeder Netzknoten i wird durch die 4 Größen

- Wirkleistung p_i
 - Blindleistung q_i
 - Spannungsbetrag $|u_i|$
 - Phasenwinkel der Spannung φ_i
- gekennzeichnet.

Knotenart	Gegeben	Gesucht
<i>Leistungsknoten</i>	$+P, +Q_{\text{ind}}$ oder $-Q_{\text{kap}}$	$ U , \varphi$
<i>Speiseknoten</i> (auch Generatorknoten oder spannungsgeregelter Knoten)	$-P, U $	Q, φ
<i>Bilanzknoten (n)</i> (auch Slack-Knoten oder Bezugsknoten)	$ U_n , \varphi_n = 0$	P, Q

Lastflußberechnung:

Ein Bilanzknoten ist notwendig, da die Summe aus eingespeister und abgenommener Wirk- und Blindleistung zuzüglich der Verluste = 0 sein muß.

Problem:

Verluste sind zunächst unbekannt

zufließende Ströme: -

abfließende Ströme: +

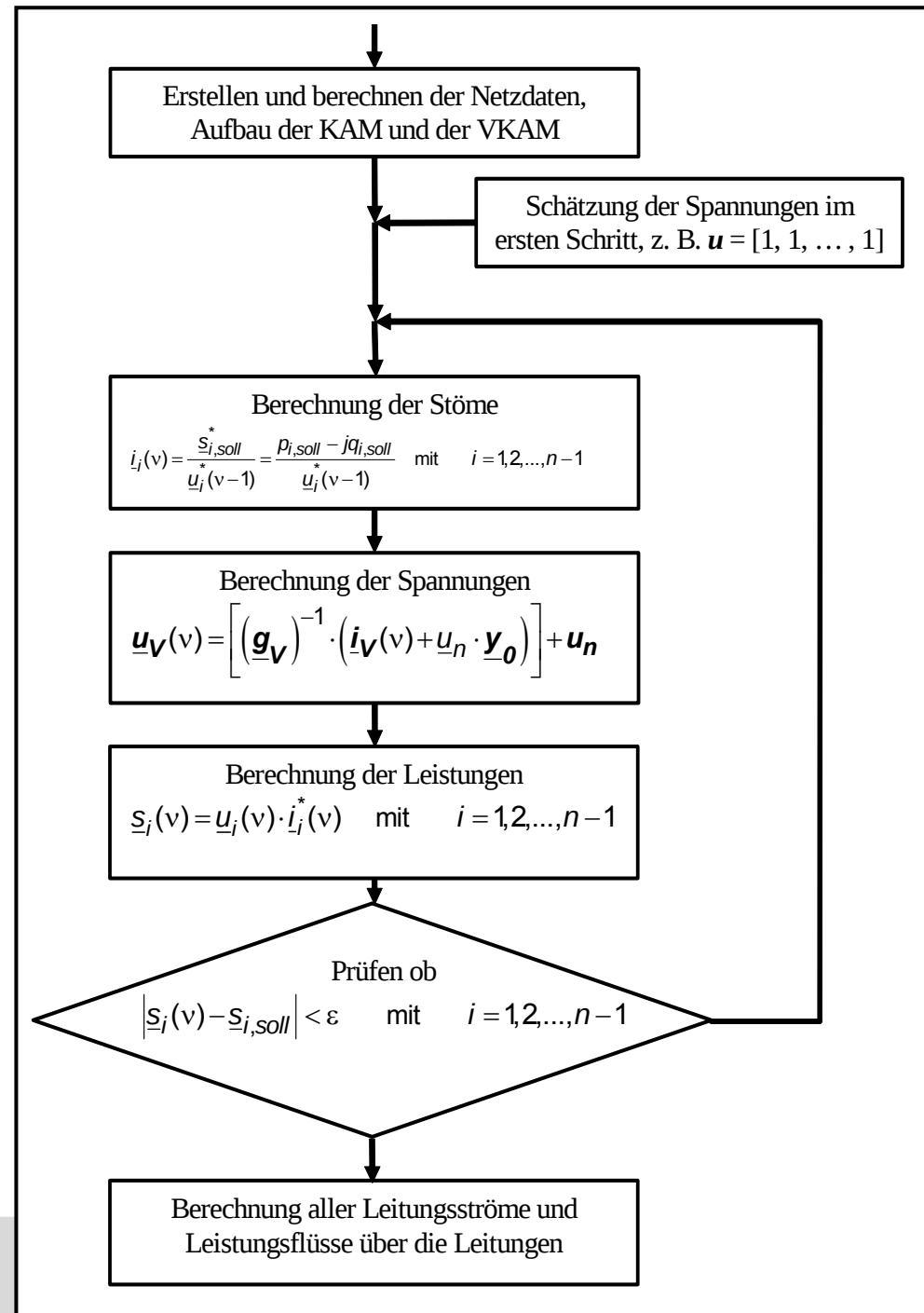
Steuerung der Lastflußberechnung, abhängig von der Art der Netzknoten

Leistungsflußberechnung: Stromiteration

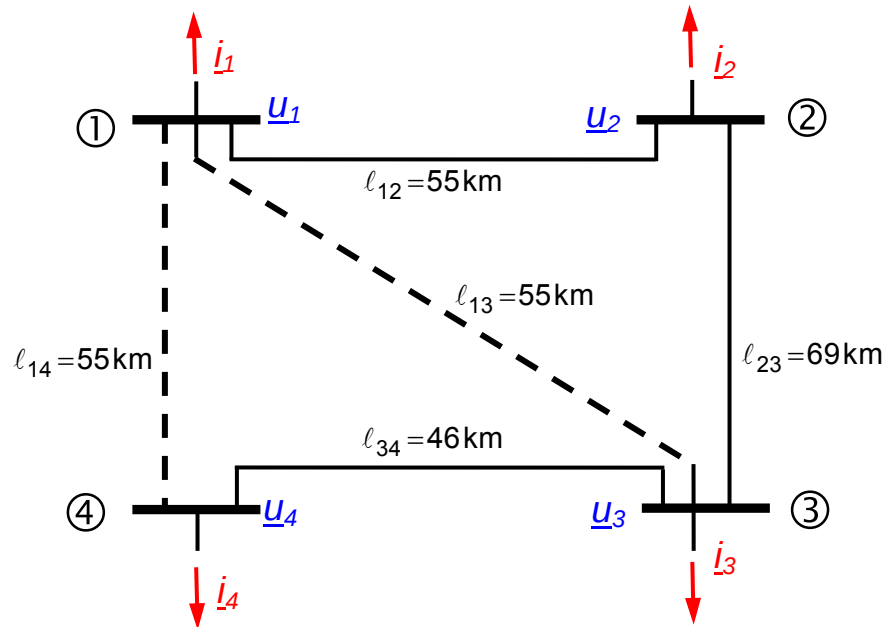
$$\underline{i}_i(v) = \frac{\underline{S}_{i,soll}^*}{\underline{u}_i^*(v-1)} = \frac{p_{i,soll} - j \cdot q_{i,soll}}{\underline{u}_i^*(v-1)}$$

$$\underline{u}_V(v) = \left[\left(\underline{g}_V \right)^{-1} \cdot \left(\underline{i}_V(v) + \underline{u}_n \cdot \underline{y}_0 \right) \right] + \underline{u}_n$$

$$\underline{S}_i(v) = \underline{u}_i(v) \cdot \underline{i}_i^*(v) \quad \text{mit} \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$



Leistungsflußberechnung: Stromiteration, Beispiel (I)



- Leiterimpedanz: $Z' = (0,157 + j0,410) \Omega/\text{km}$
- Bezugsspannung: $U_B = 110 \text{ kV}$
- Bezugsleistung: $S_B = 100 \text{ MVA}$
- Knoten 4 ist der Potentialknoten mit $\underline{u}_4 = 1$ oder $\underline{U}_4 = 110/\sqrt{3} \text{ kV}$
- Vorgegebene Leistungen
 $P_1 = 150 \text{ MW}, \cos \varphi = 0,93$
 $P_2 = 75 \text{ MW}, \cos \varphi = 0,93$
 $P_3 = -180 \text{ MW}, \cos \varphi = 0,93$
 (zufließende induktive Leistung)

$$\underline{Y}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{g}_V \cdot (\underline{u}_V - \underline{u}_n) = \underline{i}_V$$

$$\begin{pmatrix} -25 & 5 & 10 \\ 5 & -9 & 4 \\ 10 & 4 & -20 \end{pmatrix} \cdot e^{-j69,047^\circ} \cdot \begin{pmatrix} \underline{u}_1 - \underline{u}_4 \\ \underline{u}_2 - \underline{u}_4 \\ \underline{u}_3 - \underline{u}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{i}_1 \\ \underline{i}_2 \\ \underline{i}_3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{s}_1 = \frac{P_1}{S_B} + j \cdot \frac{P_1 \cdot \tan(\varphi)}{S_B} = 1,5 + j \cdot 0,593$$

$$\underline{s}_2 = \frac{P_2}{S_B} + j \cdot \frac{P_2 \cdot \tan(\varphi)}{S_B} = 0,75 + j \cdot 0,296$$

$$\underline{s}_3 = -\left(\frac{P_3}{S_B} + j \cdot \frac{P_3 \cdot \tan(\varphi)}{S_B} \right) = -1,8 - j \cdot 0,711$$

Leistungsflußberechnung: Stromiteration, Beispiel (II)

$$\begin{pmatrix} \underline{u}_1 - \underline{u}_4 \\ \underline{u}_2 - \underline{u}_4 \\ \underline{u}_3 - \underline{u}_4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{100} \begin{pmatrix} 7.1304 & 6,087 & 4,7826 \\ 6,087 & 17,3913 & 6,5217 \\ 4,7826 & 6,5217 & 8,6957 \end{pmatrix} \cdot e^{j69,047^\circ} \cdot \begin{pmatrix} \underline{i}_1 \\ \underline{i}_2 \\ \underline{i}_3 \end{pmatrix}$$

Startwerte → Spannungen:

	<i>u1</i>	<i>u2</i>	<i>u3</i>
0. Schritt:	1.0000	1.0000	1.0000
1. Schritt:	0.9517 - 0.0527i	0.9242 - 0.0827i	1.0261 + 0.0284i
2. Schritt:	0.9336 - 0.0518i	0.8952 - 0.0809i	1.0076 + 0.0291i
3. Schritt:	0.9317 - 0.0532i	0.8915 - 0.0837i	1.0069 + 0.0293i
4. Schritt:	0.9311 - 0.0532i	0.8904 - 0.0837i	1.0065 + 0.0293i

Ströme:

	<i>i1</i>	<i>i2</i>	<i>i3</i>
0. Schritt:	0	0	0
1. Schritt:	1.5000 - 0.5930i	0.7500 - 0.2960i	-1.8000 + 0.7110i
2. Schritt:	1.5370 - 0.7083i	0.7766 - 0.3898i	-1.7721 + 0.6438i
3. Schritt:	1.5665 - 0.7221i	0.8013 - 0.4031i	-1.8053 + 0.6534i
4. Schritt:	1.5685 - 0.7261i	0.8031 - 0.4074i	-1.8066 + 0.6536i

Sollwerte → Leistungen:

	<i>s1</i>	<i>s2</i>	<i>s3</i>
0. Schritt:	1.5000 + 0.5930i	0.7500 + 0.2960i	-1.8000 - 0.7110i
1. Schritt:	1.4587 + 0.4853i	0.7176 + 0.2115i	-1.8267 - 0.7807i
2. Schritt:	1.4717 + 0.5816i	0.7268 + 0.2861i	-1.7669 - 0.7004i
3. Schritt:	1.4979 + 0.5894i	0.7481 + 0.2923i	-1.7987 - 0.7107i
4. Schritt:	1.4991 + 0.5926i	0.7491 + 0.2956i	-1.7991 - 0.7108i

Leistungsflußberechnung: Stromiteration, Beispiel (III)

Der Strom $\underline{i}_4$ kann aus der letzten Gleichung der KAM bestimmt werden (wie bei Beispiel 1):

$$\underline{i}_4 = \underline{u}_1 \cdot \underline{y}_{14} + \underline{u}_3 \cdot \underline{y}_{34} - \underline{u}_4 \cdot (\underline{y}_{14} + \underline{y}_{34}) = -0,565 + j0,4799$$

Die Leistung $\underline{s}_4$ ergibt sich dann zu

$$\underline{s}_4 = \underline{u}_4 \cdot \underline{i}_4^* = -0,565 - j \cdot 0,4799$$

Diese Leistung hat negatives Vorzeichen und muß deshalb am Knoten 4 eingespeist werden.

Die Berechnung der Leistung aus der Summe gemäß

$$\underline{s}_4 = -(\underline{s}_1 + \underline{s}_2 + \underline{s}_3) = 0,4491 - j0,1774$$

ist deshalb falsch, weil in dem Netzwerk Wirkleistung verbraucht wird. Dies ist in der Rechnung dann nicht berücksichtigt.

Leistungsflußberechnung: Newton-Raphson-Iteration

Entwicklung einer Funktion $f(x)$ in eine Taylor-Reihe:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2 + \dots + \dots$$

Abbruch nach dem linearen Glied:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0) \cdot (x - x_0) = f(x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0} \cdot (x - x_0) = f(x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0} \cdot \Delta x$$

Daraus wird: $\left(\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0} \right)^{-1} \cdot [f(x) - f(x_0)] = \Delta x$ und $x = x_0 + \Delta x$

Rekursionsformel zur Bestimmung des Wertes für x , bei dem die Funktion $f(x)$ einen bestimmten Wert annimmt, z. B. $f(x) = K$,

$$\Delta x_v = \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_v} \right)^{-1} \cdot [K - f(x_v)] \quad \text{und} \quad x_{v+1} = x_v + \Delta x_v$$

Leistungsflussgleichungen:

Funktion der Veränderlichen Spannungen nach Betrag (Δu) und Phase ($\Delta \varphi$)

Die Spannungen können nach obigen Prinzip bestimmt werden, wenn man $f(x) = K$ als Sollwerte der Leistungen versteht

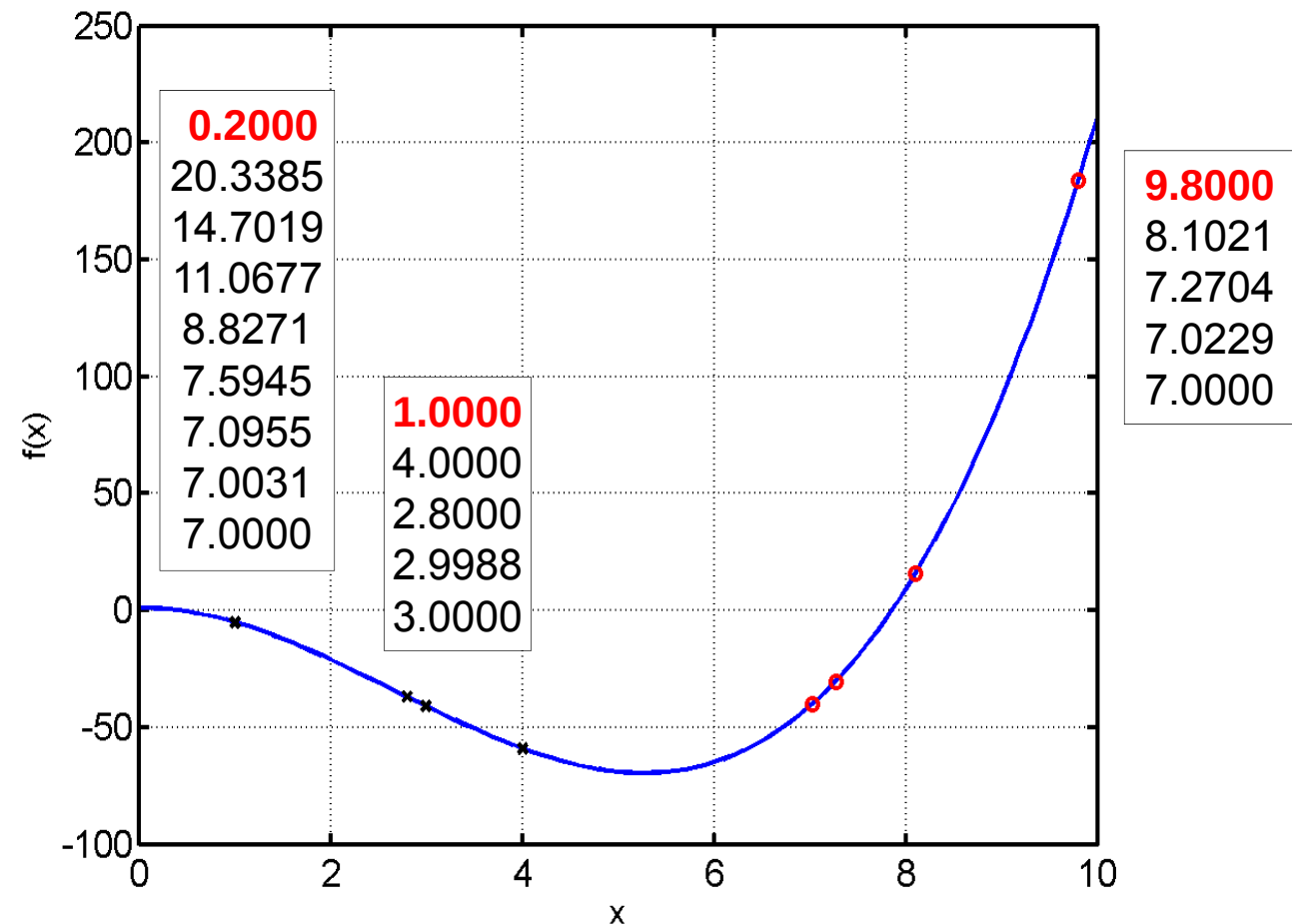
Newton-Verfahren: Suche eines Funktionswertes

$$f(x) = x^3 - 8x^2 + x + 1$$

$$f(x) = -41$$

gilt für

$$x = 3 \quad \text{und} \quad x = 7$$



Newton-Raphson-Iteration: Algorithmus ohne Generatorknoten (I)

Einfachster Fall: Netzwerk besteht nur aus Leistungsknoten und dem Bilanzknoten,
Netzwerk wird so durchnummeriert, dass n der Bilanzknoten ist

1 Bilanzknoten: $u_n = 1, \varphi_n = 0$

n-1 Leistungsknoten: Wirk- und Blindleistung $p_{i,soll}$ und $q_{i,soll}$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) sind gegeben

$$p_i \approx p_i(v) + \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial \varphi_1} \Big|_v \cdot \Delta \varphi_1 + \dots + \frac{\partial p_i}{\partial \varphi_{n-1}} \Big|_v \cdot \Delta \varphi_{n-1} + \frac{\partial p_i}{\partial u_1} \Big|_v \cdot \Delta u_1 + \dots + \frac{\partial p_i}{\partial u_{n-1}} \Big|_v \cdot \Delta u_{n-1}}_{\Delta p_i(v)}$$

$$q_i \approx q_i(v) + \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial \varphi_1} \Big|_v \cdot \Delta \varphi_1 + \dots + \frac{\partial q_i}{\partial \varphi_{n-1}} \Big|_v \cdot \Delta \varphi_{n-1} + \frac{\partial q_i}{\partial u_1} \Big|_v \cdot \Delta u_1 + \dots + \frac{\partial q_i}{\partial u_{n-1}} \Big|_v \cdot \Delta u_{n-1}}_{\Delta q_i(v)} \quad \text{mit } i = 1, 2, \dots, n-1$$

Leistungsdifferenzen: $\Delta p_i(v) = p_i - p_i(v) = p_{i,soll} - p_i(v)$

$\Delta q_i(v) = q_i - q_i(v) = q_{i,soll} - q_i(v)$ mit $i = 1, 2, \dots, n-1$

Keine Vorgabe der Leistungen

für den Bilanzknoten: $\underline{i} = \underline{g} \cdot \underline{u}$

$$\underline{s}_n = \underline{u}_n \cdot \underline{i}_n^* = 1 \cdot \underline{i}_n^* = \underline{i}_n^*$$

Newton-Raphson-Iteration: Algorithmus ohne Generatorknoten (II)

$$\mathbf{s}_{soll} - \mathbf{s}(v) = \Delta \mathbf{s}(v) = \mathbf{J}(v) \cdot \Delta \mathbf{u}(v)$$

$$\text{oder } \begin{bmatrix} \overline{p_{soll}} \\ \overline{q_{soll}} \end{bmatrix}_{2(n-1) \times 1} - \begin{bmatrix} \overline{p(v)} \\ \overline{q(v)} \end{bmatrix}_{2(n-1) \times 1} = \begin{bmatrix} \overline{\Delta p(v)} \\ \overline{\Delta q(v)} \end{bmatrix}_{2(n-1) \times 1} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial p}{\partial \phi} \right|_v & \left. \frac{\partial p}{\partial u} \right|_v \\ \left. \frac{\partial q}{\partial \phi} \right|_v & \left. \frac{\partial q}{\partial u} \right|_v \end{bmatrix}_{2(n-1) \times 2(n-1)} \cdot \begin{bmatrix} \overline{\Delta \phi(v)} \\ \overline{\Delta u(v)} \end{bmatrix}_{2(n-1) \times 1}$$

ausführlich geschrieben:

$$\begin{bmatrix} \Delta p_1(v) \\ \vdots \\ \Delta p_{n-1}(v) \\ \Delta q_1(v) \\ \vdots \\ \Delta q_{n-1}(v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial p_1}{\partial \phi_1} \right|_v & \cdots & \left. \frac{\partial p_1}{\partial \phi_{n-1}} \right|_v & \left. \frac{\partial p_1}{\partial u_1} \right|_v & \cdots & \left. \frac{\partial p_1}{\partial u_{n-1}} \right|_v \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial p_{n-1}}{\partial \phi_1} \right|_v & \cdots & \left. \frac{\partial p_{n-1}}{\partial \phi_{n-1}} \right|_v & \left. \frac{\partial p_{n-1}}{\partial u_1} \right|_v & \cdots & \left. \frac{\partial p_{n-1}}{\partial u_{n-1}} \right|_v \\ \left. \frac{\partial q_1}{\partial \phi_1} \right|_v & \cdots & \left. \frac{\partial q_1}{\partial \phi_{n-1}} \right|_v & \left. \frac{\partial q_1}{\partial u_1} \right|_v & \cdots & \left. \frac{\partial q_1}{\partial u_{n-1}} \right|_v \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial q_{n-1}}{\partial \phi_1} \right|_v & \cdots & \left. \frac{\partial q_{n-1}}{\partial \phi_{n-1}} \right|_v & \left. \frac{\partial q_{n-1}}{\partial u_1} \right|_v & \cdots & \left. \frac{\partial q_{n-1}}{\partial u_{n-1}} \right|_v \end{bmatrix}_{2(n-1) \times 2(n-1)} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \phi_1(v) \\ \vdots \\ \Delta \phi_{n-1}(v) \\ \Delta u_1(v) \\ \vdots \\ \Delta u_{n-1}(v) \end{bmatrix}$$

Newton-Raphson-Iteration: Algorithmus ohne Generatorknoten (III)

Ziel: Berechnung der Spannungen nach Betrag und Phase

⇒ Matrixgleichung durch Linksmultiplikation mit $\mathbf{J}(\nu)^{-1}$ nach $\Delta \mathbf{u}(\nu)$ auflösen

$$\mathbf{J}(\nu)^{-1} \cdot (\mathbf{s}_{soll} - \mathbf{s}(\nu)) = \mathbf{J}(\nu)^{-1} \cdot \Delta \mathbf{s}(\nu) = \Delta \mathbf{u}(\nu) \quad \text{oder} \quad \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \boldsymbol{\varphi}} \big|_{\nu} & \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{u}} \big|_{\nu} \\ \hline \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \boldsymbol{\varphi}} \big|_{\nu} & \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{u}} \big|_{\nu} \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \left(\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{soll} \\ \mathbf{q}_{soll} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{p}(\nu) \\ \mathbf{q}(\nu) \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\varphi}(\nu) \\ \Delta \mathbf{u}(\nu) \end{bmatrix}$$

Berechnung der „neuen“ Werte ($\nu+1$) aus den Werten des letzten Iterationsschritts (ν):

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}(\nu+1) \\ \mathbf{u}(\nu+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}(\nu) \\ \mathbf{u}(\nu) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\varphi}(\nu) \\ \Delta \mathbf{u}(\nu) \end{bmatrix}$$

Problem:

Die Elemente der Jacobi-Matrix müssen bei jedem Iterationsschritt neu berechnet werden

$$\mathbf{J}(\nu) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \boldsymbol{\varphi}} \big|_{\nu} & \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{u}} \big|_{\nu} \\ \hline \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \boldsymbol{\varphi}} \big|_{\nu} & \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{u}} \big|_{\nu} \end{bmatrix}_{2(n-1) \times 2(n-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\nu) & \mathbf{B}(\nu) \\ \hline \mathbf{C}(\nu) & \mathbf{D}(\nu) \end{bmatrix}$$

Newton-Raphson-Iteration: Differentialiale von Wirk- und Blindleistung (I)

$$p_2 = u_2 \cdot [g_{21} \cdot u_1 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1 - \alpha_{21}) + g_{22} \cdot u_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_2 - \alpha_{22}) + g_{23} \cdot u_3 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3 - \alpha_{23}) + \dots + g_{2,n-1} \cdot u_{n-1} \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_{n-1} - \alpha_{2,n-1})]$$

$$q_2 = u_2 \cdot [g_{21} \cdot u_1 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1 - \alpha_{21}) + g_{22} \cdot u_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_2 - \alpha_{22}) + g_{23} \cdot u_3 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3 - \alpha_{23}) + \dots + g_{2,n-1} \cdot u_{n-1} \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_{n-1} - \alpha_{2,n-1})]$$

$$p_i = \operatorname{Re}\{\underline{s}_i\} = u_i \cdot \left[\sum_{k=1}^n g_{ik} \cdot u_k \cdot \cos(\varphi_i - \varphi_k - \alpha_{ik}) \right]$$

$$q_i = \operatorname{Im}\{\underline{s}_i\} = u_i \cdot \left[\sum_{k=1}^n g_{ik} \cdot u_k \cdot \sin(\varphi_i - \varphi_k - \alpha_{ik}) \right]$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1$$

Wirkleistung p_2

$$\frac{\partial p_2}{\partial \varphi_1} = +u_2 \cdot [g_{21} \cdot u_1 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1 - \alpha_{21})]$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial u_1} = \frac{1}{u_1} \cdot \{u_2 \cdot [g_{21} \cdot u_1 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1 - \alpha_{21})]\}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_2}{\partial \varphi_2} = & -u_2 \cdot [g_{21} \cdot u_1 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1 - \alpha_{21}) \\ & + g_{22} \cdot u_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_2 - \alpha_{22}) \\ & + g_{23} \cdot u_3 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3 - \alpha_{23}) \\ & + \dots \\ & + g_{2,n-1} \cdot u_{n-1} \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_{n-1} - \alpha_{2,n-1})] \\ & + u_2 \cdot [g_{22} \cdot u_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_2 - \alpha_{22})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_2}{\partial u_2} = & \frac{1}{u_2} \cdot \{u_2 \cdot [g_{21} \cdot u_1 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1 - \alpha_{21}) \\ & + g_{22} \cdot u_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_2 - \alpha_{22}) \\ & + g_{23} \cdot u_3 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3 - \alpha_{23}) \\ & + \dots \\ & + g_{2,n-1} \cdot u_{n-1} \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_{n-1} - \alpha_{2,n-1})] \\ & + u_2 \cdot [g_{22} \cdot u_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_2 - \alpha_{22})]\} \end{aligned}$$

Blindleistung q_2

$$\frac{\partial q_2}{\partial \varphi_1} = -u_2 \cdot [g_{21} \cdot u_1 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1 - \alpha_{21})]$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial u_1} = \frac{1}{u_1} \cdot \{u_2 \cdot [g_{21} \cdot u_1 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1 - \alpha_{21})]\}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_2}{\partial \varphi_2} = & +u_2 \cdot [g_{21} \cdot u_1 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1 - \alpha_{21}) \\ & + g_{22} \cdot u_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_2 - \alpha_{22}) \\ & + g_{23} \cdot u_3 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3 - \alpha_{23}) \\ & + \dots \\ & + g_{2,n-1} \cdot u_{n-1} \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_{n-1} - \alpha_{2,n-1})] \\ & - u_2 \cdot [g_{22} \cdot u_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_2 - \alpha_{22})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_2}{\partial u_2} = & \frac{1}{u_2} \cdot \{u_2 \cdot [g_{21} \cdot u_1 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1 - \alpha_{21}) \\ & + g_{22} \cdot u_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_2 - \alpha_{22}) \\ & + g_{23} \cdot u_3 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3 - \alpha_{23}) \\ & + \dots \\ & + g_{2,n-1} \cdot u_{n-1} \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_{n-1} - \alpha_{2,n-1})] \\ & + u_2 \cdot [g_{22} \cdot u_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_2 - \alpha_{22})]\} \end{aligned}$$

Newton-Raphson-Iteration: Differentiale von Wirk- und Blindleistung (II)

Wirkleistung:

$$\frac{\partial p_i}{\partial \varphi_j} = u_i \cdot [g_{ij} \cdot u_j \cdot \sin(\varphi_i - \varphi_j - \alpha_{ij})]$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \varphi_i} = -u_i \cdot \left[\sum_{k=1}^n g_{ik} \cdot u_k \cdot \sin(\varphi_i - \varphi_k - \alpha_{ik}) \right] + u_i \cdot [g_{ii} \cdot u_i \cdot \sin(\varphi_i - \varphi_i - \alpha_{ii})]$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial u_j} = \frac{1}{u_j} \cdot \left\{ u_i \cdot [g_{ij} \cdot u_j \cdot \cos(\varphi_i - \varphi_j - \alpha_{ij})] \right\}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial u_i} = \frac{1}{u_i} \cdot \left\{ u_i \cdot \left[\sum_{k=1}^n g_{ik} \cdot u_k \cdot \cos(\varphi_i - \varphi_k - \alpha_{ik}) \right] + u_i \cdot [g_{ii} \cdot u_i \cdot \cos(\varphi_i - \varphi_i - \alpha_{ii})] \right\}$$

Blindleistung:

$$\frac{\partial q_i}{\partial \varphi_j} = -u_i \cdot [g_{ij} \cdot u_j \cdot \cos(\varphi_i - \varphi_j - \alpha_{ij})]$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial \varphi_i} = +u_i \cdot \left[\sum_{k=1}^n g_{ik} \cdot u_k \cdot \cos(\varphi_i - \varphi_k - \alpha_{ik}) \right] - u_i \cdot [g_{ii} \cdot u_i \cdot \cos(\varphi_i - \varphi_i - \alpha_{ii})]$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial u_j} = \frac{1}{u_j} \cdot \left\{ u_i \cdot [g_{ij} \cdot u_j \cdot \sin(\varphi_i - \varphi_j - \alpha_{ij})] \right\}$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial u_i} = \frac{1}{u_i} \cdot \left\{ u_i \cdot \left[\sum_{k=1}^n g_{ik} \cdot u_k \cdot \sin(\varphi_i - \varphi_k - \alpha_{ik}) \right] + u_i \cdot [g_{ii} \cdot u_i \cdot \sin(\varphi_i - \varphi_i - \alpha_{ii})] \right\}$$

Newton-Raphson-Iteration: Definition der Hilfsmatrix $\underline{Z}_1$

$$\underline{Z}_1(v) = \underline{u}_{diag,n}(v) \cdot \underline{g}^* \cdot \underline{u}_{diag,n}^*(v) = \begin{bmatrix} u_1 [g_{11} \cdot u_1 \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_1 - \alpha_{11})}] & u_1 [g_{12} \cdot u_2 \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2 - \alpha_{12})}] & \dots & u_1 [g_{1n} \cdot u_n \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_n - \alpha_{1n})}] \\ u_2 [g_{21} \cdot u_1 \cdot e^{j(\varphi_2 - \varphi_1 - \alpha_{21})}] & u_2 [g_{22} \cdot u_2 \cdot e^{j(\varphi_2 - \varphi_2 - \alpha_{22})}] & \dots & u_2 [g_{2n} \cdot u_n \cdot e^{j(\varphi_2 - \varphi_n - \alpha_{2n})}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n [g_{n1} \cdot u_1 \cdot e^{j(\varphi_n - \varphi_1 - \alpha_{n1})}] & u_n [g_{n2} \cdot u_2 \cdot e^{j(\varphi_n - \varphi_2 - \alpha_{n2})}] & \dots & u_n [g_{nn} \cdot u_n \cdot e^{j(\varphi_n - \varphi_n - \alpha_{nn})}] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{u}_1(v) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \underline{u}_2(v) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \underline{u}_n(v) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{g}_{11}^* & \underline{g}_{12}^* & \dots & \underline{g}_{1n}^* \\ \underline{g}_{21}^* & \underline{g}_{22}^* & \dots & \underline{g}_{2n}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{g}_{n1}^* & \underline{g}_{n2}^* & \dots & \underline{g}_{nn}^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{u}_1^*(v) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \underline{u}_2^*(v) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \underline{u}_n^*(v) \end{pmatrix}$$

Newton-Raphson-Iteration: Definition der Hilfsmatrix $\underline{Z}_2$

$$\underline{Z}_2(v) = \underline{u}_{diag,n}(v) \cdot \underline{g}^* \cdot \underline{e}_{diag,n}^*(v)$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{u}_1(v) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \underline{u}_2(v) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \underline{u}_n(v) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{g}_{11}^* & \underline{g}_{12}^* & \dots & \underline{g}_{1n}^* \\ \underline{g}_{21}^* & \underline{g}_{22}^* & \dots & \underline{g}_{2n}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{g}_{n1}^* & \underline{g}_{n2}^* & \dots & \underline{g}_{nn}^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\underline{u}_1^*(v)}{|\underline{u}_1(v)|} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\underline{u}_2^*(v)}{|\underline{u}_2(v)|} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\underline{u}_n^*(v)}{|\underline{u}_n(v)|} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{u_1}{\underline{u}_1} \left[g_{11} \cdot u_1 \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_1 - \alpha_{11})} \right] & \frac{u_1}{\underline{u}_2} \left[g_{12} \cdot u_2 \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2 - \alpha_{12})} \right] & \dots & \frac{u_1}{\underline{u}_n} \left[g_{1n} \cdot u_n \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_n - \alpha_{1n})} \right] \\ \frac{u_2}{\underline{u}_1} \left[g_{21} \cdot u_1 \cdot e^{j(\varphi_2 - \varphi_1 - \alpha_{21})} \right] & \frac{u_2}{\underline{u}_2} \left[g_{22} \cdot u_2 \cdot e^{j(\varphi_2 - \varphi_2 - \alpha_{22})} \right] & \dots & \frac{u_2}{\underline{u}_n} \left[g_{2n} \cdot u_n \cdot e^{j(\varphi_2 - \varphi_n - \alpha_{2n})} \right] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{u_n}{\underline{u}_1} \left[g_{n1} \cdot u_1 \cdot e^{j(\varphi_n - \varphi_1 - \alpha_{n1})} \right] & \frac{u_n}{\underline{u}_2} \left[g_{n2} \cdot u_2 \cdot e^{j(\varphi_n - \varphi_2 - \alpha_{n2})} \right] & \dots & \frac{u_n}{\underline{u}_n} \left[g_{nn} \cdot u_n \cdot e^{j(\varphi_n - \varphi_n - \alpha_{nn})} \right] \end{bmatrix}$$

Newton-Raphson-Iteration: Berechnung der Jacobi-Matrix $J(v)$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \boldsymbol{\varphi}} \right|_v = \mathbf{A}_n(v) = +\text{Im}\{\underline{\mathbf{Z}}_1(v)\} - \text{diag}\{q_i(v)\}$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{u}} \right|_v = \mathbf{B}_n(v) = +\text{Re}\{\underline{\mathbf{Z}}_2(v)\} + \text{diag}\left\{\frac{1}{u_i} \cdot p_i(v)\right\}$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \boldsymbol{\varphi}} \right|_v = \mathbf{C}_n(v) = -\text{Re}\{\underline{\mathbf{Z}}_1(v)\} + \text{diag}\{p_i(v)\}$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{u}} \right|_v = \mathbf{D}_n(v) = +\text{Im}\{\underline{\mathbf{Z}}_2(v)\} + \text{diag}\left\{\frac{1}{u_i} \cdot q_i(v)\right\}$$

$$\begin{bmatrix} \left. \frac{\partial p_1}{\partial \varphi_1} \right|_v & \dots & \left. \frac{\partial p_1}{\partial \varphi_n} \right|_v & \left. \frac{\partial p_1}{\partial u_1} \right|_v & \dots & \left. \frac{\partial p_1}{\partial u_n} \right|_v \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial p_n}{\partial \varphi_1} \right|_v & \dots & \left. \frac{\partial p_n}{\partial \varphi_n} \right|_v & \left. \frac{\partial p_n}{\partial u_1} \right|_v & \dots & \left. \frac{\partial p_n}{\partial u_n} \right|_v \\ \left. \frac{\partial q_1}{\partial \varphi_1} \right|_v & \dots & \left. \frac{\partial q_1}{\partial \varphi_n} \right|_v & \left. \frac{\partial q_1}{\partial u_1} \right|_v & \dots & \left. \frac{\partial q_1}{\partial u_n} \right|_v \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial q_{n-1}}{\partial \varphi_1} \right|_v & \dots & \left. \frac{\partial q_{n-1}}{\partial \varphi_n} \right|_v & \left. \frac{\partial q_{n-1}}{\partial u_1} \right|_v & \dots & \left. \frac{\partial q_{n-1}}{\partial u_n} \right|_v \end{bmatrix}_{2n \times 2n} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_n(v) & \mathbf{B}_n(v) \\ \mathbf{C}_n(v) & \mathbf{D}_n(v) \end{bmatrix} = \mathbf{J}^+(v)$$

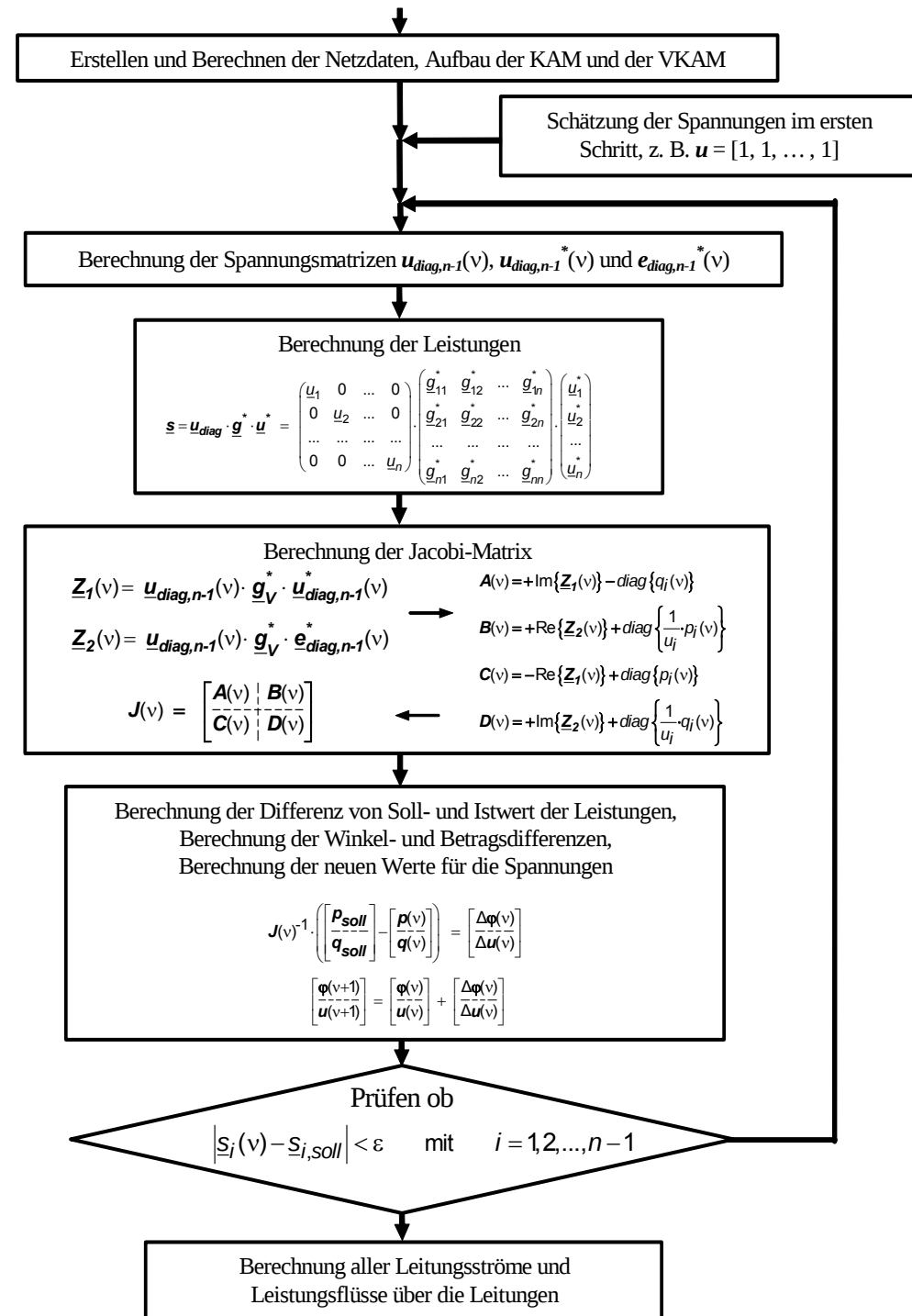
$$\text{diag}\left\{\frac{1}{u_i} \cdot q_i(v)\right\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{u_1} \cdot q_1(v) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{u_2} \cdot q_2(v) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{u_n} \cdot q_n(v) \end{pmatrix}$$

$$p_i = u_i \cdot \left[\sum_{k=1}^n g_{ik} \cdot u_k \cdot \cos(\varphi_i - \varphi_k - \alpha_{ik}) \right]$$

$$q_i = u_i \cdot \left[\sum_{k=1}^n g_{ik} \cdot u_k \cdot \sin(\varphi_i - \varphi_k - \alpha_{ik}) \right]$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Flußplan des Algorithmus



Newton-Raphson-Iteration: Algorithmus mit Generator-, Leistungs- und Bilanzknoten

1 Bilanzknoten:

$$u_n = 1, \varphi_n = 0$$

Leistungsknoten:

Wirk- und Blindleistung

$p_{i,soll}$ und $q_{i,soll}$ sind gegeben

Generatorknoten:

Wirkleistung $p_{k,soll}$ und

Spannung u_k sind gegeben

Vorgabe für $q_{k,soll}$ existiert

nicht, φ_k ist gesucht

$\Delta u_k = 0$, da u_k durch das Kraftwerk konstant geregelt wird

Kein Sollwert für die Blindleistung $q_{k,soll}$

$$\begin{bmatrix} \Delta p_1(v) \\ \vdots \\ \Delta p_k(v) \\ \vdots \\ \Delta p_{n-1}(v) \\ \Delta q_1(v) \\ \vdots \\ \Delta q_{k-1}(v) \\ \boxed{\Delta q_k(v)} \\ \Delta q_{k+1}(v) \\ \vdots \\ \Delta q_{n-1}(v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial \varphi_1} & \dots & \frac{\partial p_1}{\partial \varphi_k} & \dots & \frac{\partial p_1}{\partial \varphi_{n-1}} & \frac{\partial p_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial p_1}{\partial u_{k-1}} & \boxed{\frac{\partial p_1}{\partial u_k}} & \frac{\partial p_1}{\partial u_{k+1}} & \dots & \frac{\partial p_1}{\partial u_{n-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p_k}{\partial \varphi_1} & \dots & \frac{\partial p_k}{\partial \varphi_k} & \dots & \frac{\partial p_k}{\partial \varphi_{n-1}} & \frac{\partial p_k}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial p_k}{\partial u_{k-1}} & \boxed{\frac{\partial p_k}{\partial u_k}} & \frac{\partial p_k}{\partial u_{k+1}} & \dots & \frac{\partial p_k}{\partial u_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p_{n-1}}{\partial \varphi_1} & \dots & \frac{\partial p_{n-1}}{\partial \varphi_k} & \dots & \frac{\partial p_{n-1}}{\partial \varphi_{n-1}} & \frac{\partial p_{n-1}}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial p_{n-1}}{\partial u_{k-1}} & \boxed{\frac{\partial p_{n-1}}{\partial u_k}} & \frac{\partial p_{n-1}}{\partial u_{k+1}} & \dots & \frac{\partial p_{n-1}}{\partial u_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q_1}{\partial \varphi_1} & \dots & \frac{\partial q_1}{\partial \varphi_k} & \dots & \frac{\partial q_1}{\partial \varphi_{n-1}} & \frac{\partial q_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial q_1}{\partial u_{k-1}} & \boxed{\frac{\partial q_1}{\partial u_k}} & \frac{\partial q_1}{\partial u_{k+1}} & \dots & \frac{\partial q_1}{\partial u_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q_{k-1}}{\partial \varphi_1} & \dots & \frac{\partial q_{k-1}}{\partial \varphi_k} & \dots & \frac{\partial q_{k-1}}{\partial \varphi_{n-1}} & \frac{\partial q_{k-1}}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial q_{k-1}}{\partial u_{k-1}} & \boxed{\frac{\partial q_{k-1}}{\partial u_k}} & \frac{\partial q_{k-1}}{\partial u_{k+1}} & \dots & \frac{\partial q_{k-1}}{\partial u_{n-1}} \\ \boxed{\frac{\partial q_k}{\partial \varphi_1}} & \dots & \boxed{\frac{\partial q_k}{\partial \varphi_k}} & \dots & \boxed{\frac{\partial q_k}{\partial \varphi_{n-1}}} & \boxed{\frac{\partial q_k}{\partial u_1}} & \dots & \boxed{\frac{\partial q_k}{\partial u_{k-1}}} & \boxed{\frac{\partial q_k}{\partial u_k}} & \boxed{\frac{\partial q_k}{\partial u_{k+1}}} & \dots & \boxed{\frac{\partial q_k}{\partial u_{n-1}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q_{k+1}}{\partial \varphi_1} & \dots & \frac{\partial q_{k+1}}{\partial \varphi_k} & \dots & \frac{\partial q_{k+1}}{\partial \varphi_{n-1}} & \frac{\partial q_{k+1}}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial q_{k+1}}{\partial u_{k-1}} & \boxed{\frac{\partial q_{k+1}}{\partial u_k}} & \frac{\partial q_{k+1}}{\partial u_{k+1}} & \dots & \frac{\partial q_{k+1}}{\partial u_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q_{n-1}}{\partial \varphi_1} & \dots & \frac{\partial q_{n-1}}{\partial \varphi_k} & \dots & \frac{\partial q_{n-1}}{\partial \varphi_{n-1}} & \frac{\partial q_{n-1}}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial q_{n-1}}{\partial u_{k-1}} & \boxed{\frac{\partial q_{n-1}}{\partial u_k}} & \frac{\partial q_{n-1}}{\partial u_{k+1}} & \dots & \frac{\partial q_{n-1}}{\partial u_{n-1}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \varphi_1(v) \\ \vdots \\ \Delta \varphi_k(v) \\ \vdots \\ \Delta \varphi_{n-1}(v) \\ \Delta u_1(v) \\ \vdots \\ \Delta u_{k-1}(v) \\ \boxed{\Delta u_k(v)} \\ \Delta u_{k+1}(v) \\ \vdots \\ \Delta u_{n-1}(v) \end{bmatrix}$$

Newton-Raphson-Iteration: Algorithmus mit Generator-, Leistungs- und Bilanzknoten

$$\begin{bmatrix} \Delta\varphi_1(v) \\ \vdots \\ \Delta\varphi_{n-1}(v) \\ \Delta u_1(v) \\ \vdots \\ \Delta u_{k-1}(v) \\ \Delta u_{k+1}(v) \\ \vdots \\ \Delta u_{n-1}(v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial \varphi_1} \Big|_v & \dots & \frac{\partial p_1}{\partial \varphi_{n-1}} \Big|_v & \frac{\partial p_1}{\partial u_1} \Big|_v & \dots & \frac{\partial p_1}{\partial u_{k-1}} \Big|_v & \frac{\partial p_1}{\partial u_{k+1}} \Big|_v & \dots & \frac{\partial p_1}{\partial u_{n-1}} \Big|_v \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p_{n-1}}{\partial \varphi_1} \Big|_v & \dots & \frac{\partial p_{n-1}}{\partial \varphi_{n-1}} \Big|_v & \frac{\partial p_{n-1}}{\partial u_1} \Big|_v & \dots & \frac{\partial p_{n-1}}{\partial u_{k-1}} \Big|_v & \frac{\partial p_{n-1}}{\partial u_{k+1}} \Big|_v & \dots & \frac{\partial p_{n-1}}{\partial u_{n-1}} \Big|_v \\ \frac{\partial q_1}{\partial \varphi_1} \Big|_v & \dots & \frac{\partial q_1}{\partial \varphi_{n-1}} \Big|_v & \frac{\partial q_1}{\partial u_1} \Big|_v & \dots & \frac{\partial q_1}{\partial u_{k-1}} \Big|_v & \frac{\partial q_1}{\partial u_{k+1}} \Big|_v & \dots & \frac{\partial q_1}{\partial u_{n-1}} \Big|_v \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q_{k-1}}{\partial \varphi_1} \Big|_v & \dots & \frac{\partial q_{k-1}}{\partial \varphi_{n-1}} \Big|_v & \frac{\partial q_{k-1}}{\partial u_1} \Big|_v & \dots & \frac{\partial q_{k-1}}{\partial u_{k-1}} \Big|_v & \frac{\partial q_{k-1}}{\partial u_{k+1}} \Big|_v & \dots & \frac{\partial q_{k-1}}{\partial u_{n-1}} \Big|_v \\ \frac{\partial q_{k+1}}{\partial \varphi_1} \Big|_v & \dots & \frac{\partial q_{k+1}}{\partial \varphi_{n-1}} \Big|_v & \frac{\partial q_{k+1}}{\partial u_1} \Big|_v & \dots & \frac{\partial q_{k+1}}{\partial u_{k-1}} \Big|_v & \frac{\partial q_{k+1}}{\partial u_{k+1}} \Big|_v & \dots & \frac{\partial q_{k+1}}{\partial u_{n-1}} \Big|_v \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q_{n-1}}{\partial \varphi_1} \Big|_v & \dots & \frac{\partial q_{n-1}}{\partial \varphi_{n-1}} \Big|_v & \frac{\partial p_{n-1}}{\partial u_1} \Big|_v & \dots & \frac{\partial q_{n-1}}{\partial u_{k-1}} \Big|_v & \frac{\partial q_{n-1}}{\partial u_{k+1}} \Big|_v & \dots & \frac{\partial p_{n-1}}{\partial u_{n-1}} \Big|_v \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Delta p_1(v) \\ \vdots \\ \Delta p_{n-1}(v) \\ \Delta q_1(v) \\ \vdots \\ \Delta q_{k-1}(v) \\ \Delta q_{k+1}(v) \\ \vdots \\ \Delta q_{n-1}(v) \end{bmatrix}$$

Leistungsflußberechnung: entkoppeltes Verfahren

Entkoppeltes Verfahren:

$$\frac{\partial p_i}{\partial u_j} = 0$$

und

$$\frac{\partial q_i}{\partial \varphi_j} = 0$$

$$J = \left[\begin{array}{cccc|cccc} \frac{\partial p_1}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial p_1}{\partial \varphi_2} & \dots & \frac{\partial p_1}{\partial \varphi_{n-1}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial p_2}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial p_2}{\partial \varphi_2} & \dots & \frac{\partial p_2}{\partial \varphi_{n-1}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p_{n-1}}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial p_{n-1}}{\partial \varphi_2} & \dots & \frac{\partial p_{n-1}}{\partial \varphi_{n-1}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial q_1}{\partial u_1} & \frac{\partial q_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial q_1}{\partial u_{n-1}} \\ 0 & 0 & \dots & \vdots & \frac{\partial q_2}{\partial u_1} & \frac{\partial q_2}{\partial u_2} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial q_1}{\partial u_{n-1}} & \frac{\partial q_{n-1}}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial q_{n-1}}{\partial u_{n-1}} \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} \Delta p_1(v) \\ \vdots \\ \Delta p_{n-1}(v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial \varphi_1} \Big|_v & \dots & \frac{\partial p_1}{\partial \varphi_{n-1}} \Big|_v \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p_{n-1}}{\partial \varphi_1} \Big|_v & \dots & \frac{\partial p_{n-1}}{\partial \varphi_{n-1}} \Big|_v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \varphi_1(v) \\ \vdots \\ \Delta \varphi_{n-1}(v) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta q_1(v) \\ \vdots \\ \Delta q_{n-1}(v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial u_1} \Big|_v & \dots & \frac{\partial q_1}{\partial u_{n-1}} \Big|_v \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q_{n-1}}{\partial u_1} \Big|_v & \dots & \frac{\partial q_{n-1}}{\partial u_{n-1}} \Big|_v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta u_1(v) \\ \vdots \\ \Delta u_{n-1}(v) \end{bmatrix}$$

DC-Leistungsfluss (I)

Die Leistungsgleichungen können durch 3 Annahmen vereinfacht werden

1) $R \ll X$ (ohmsche Widerstände werden vernachlässigt):

$$\begin{aligned} \underline{g}_{DC,ik} &= \sum_{k=1}^n \underline{g}_{ik} \stackrel{r_{ik} \ll x_{ik}}{\approx} \sum_{k=1}^n j \cdot \operatorname{Im}\{\underline{g}_{ik}\} = \sum_{k=1}^n e^{+j\frac{\pi}{2}} \cdot \operatorname{Im}\{\underline{g}_{ik}\} = \left[\sum_{k=1}^n \operatorname{Im}\{\underline{g}_{ik}\} \right] \cdot e^{+j\frac{\pi}{2}} \quad i, k = 1, 2, \dots, n \\ &= [\underline{g}_{DC,ik}] \cdot e^{j\left(+\frac{\pi}{2}\right)} \end{aligned}$$

Für die Leistungsflussgleichungen folgt daraus:

$$p_i = \operatorname{Re}\{\underline{s}_i\} = u_i \cdot \left[\sum_{k=1}^n g_{ik} \cdot u_k \cdot \cos\left(\varphi_i - \varphi_k - \frac{\pi}{2}\right) \right] = +u_i \cdot \sum_{k=1}^n g_{ik} \cdot u_k \cdot \sin(\varphi_i - \varphi_k)$$

$$q_i = \operatorname{Im}\{\underline{s}_i\} = u_i \cdot \left[\sum_{k=1}^n g_{ik} \cdot u_k \cdot \sin\left(\varphi_i - \varphi_k - \frac{\pi}{2}\right) \right] = -u_i \cdot \sum_{k=1}^n g_{ik} \cdot u_k \cdot \cos(\varphi_i - \varphi_k) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

2) Bei kleinen Winkeldifferenzen $(\varphi_i - \varphi_k)$: $\sin(\varphi_i - \varphi_k) \approx (\varphi_i - \varphi_k)$ und $\cos(\varphi_i - \varphi_k) \approx 1$

$$p_i = \operatorname{Re}\{\underline{s}_i\} = +u_i \cdot \sum_{k=1}^n g_{ik} \cdot u_k \cdot (\varphi_i - \varphi_k) \quad q_i = \operatorname{Im}\{\underline{s}_i\} = -u_i \cdot \sum_{k=1}^n g_{ik} \cdot u_k \quad i = 1, 2, \dots, n$$

DC-Leistungsfluss (II)

- 3) Beträge der Spannungen an allen Knoten sehr ähnlich und nahe der Bemessungsspannung: $u_i \approx u_k \approx 1$

$$p_i = \operatorname{Re}\{\underline{s}_i\} = \sum_{k=1}^n g_{ik} \cdot (\varphi_i - \varphi_k) = \sum_{k=1}^n B_{ik} \cdot (\varphi_i - \varphi_k) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Gleichung zeilenweise schreiben und Winkel separieren:

$$\begin{aligned} p_1 &= [B_{11} + B_{12} + \dots + B_{1n}] \cdot \varphi_1 - [B_{11} \cdot \varphi_1 + B_{12} \cdot \varphi_2 + \dots + B_{1n} \cdot \varphi_n] \\ p_2 &= [B_{21} + B_{22} + \dots + B_{2n}] \cdot \varphi_2 - [B_{21} \cdot \varphi_1 + B_{22} \cdot \varphi_2 + \dots + B_{2n} \cdot \varphi_n] \\ &\dots \\ p_n &= [B_{n1} + B_{n2} + \dots + B_{nn}] \cdot \varphi_n - [B_{n1} \cdot \varphi_1 + B_{n2} \cdot \varphi_2 + \dots + B_{nn} \cdot \varphi_n] \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n B_{1,k} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=1}^n B_{2,k} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{k=1}^n B_{n-1,k} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sum_{k=1}^n B_{n,k} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1,n-1} & B_{1,n} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2,n-1} & B_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ B_{n-1,1} & B_{n-1,2} & \dots & B_{n-1,n-1} & B_{n-1,n} \\ B_{n,1} & B_{n,2} & \dots & B_{n,n-1} & B_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \\ \varphi_n \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \mathbf{p} = \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\varphi}$$

DC-Leistungsfluss (III)

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n B_{1,k} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=1}^n B_{2,k} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{k=1}^n B_{n-1,k} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sum_{k=1}^n B_{n,k} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1,n-1} & B_{1,n} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2,n-1} & B_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ B_{n-1,1} & B_{n-1,2} & \dots & B_{n-1,n-1} & B_{n-1,n} \\ B_{n,1} & B_{n,2} & \dots & B_{n,n-1} & B_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \\ \varphi_n \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \mathbf{p} = \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\varphi}$$

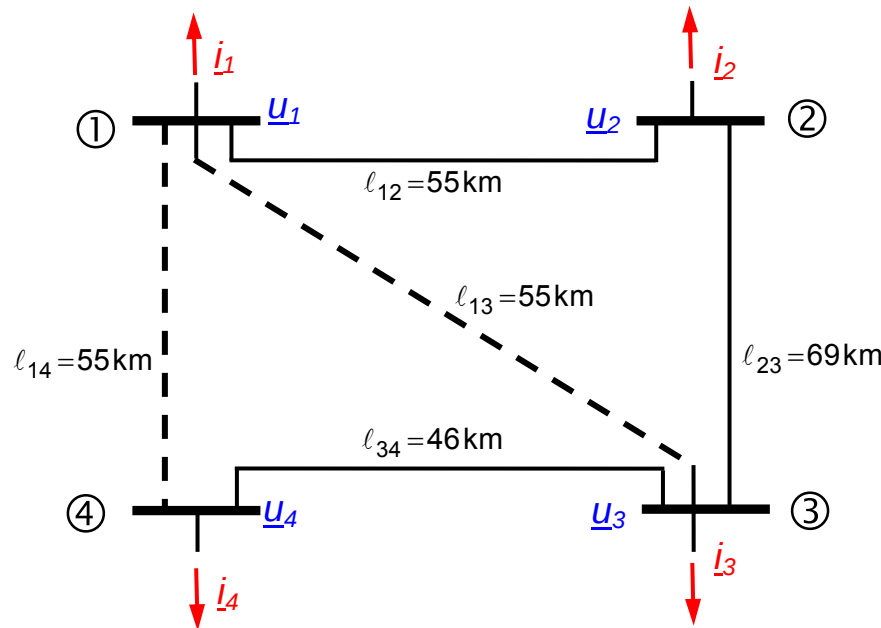
Berücksichtigung von $\varphi_n = 0$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n B_{1,k} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=1}^n B_{2,k} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{k=1}^n B_{n-1,k} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1,n-1} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ B_{n-1,1} & B_{n-1,2} & \dots & B_{n-1,n-1} & 0 \\ B_{n,1} & B_{n,2} & \dots & B_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \\ \varphi_n \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \mathbf{p} = \mathbf{B}_{mod} \cdot \boldsymbol{\varphi}$$

Bei Vorgabe der Wirkleistungen $p_1, p_2, \dots, p_n$

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{B}_{mod}^{-1} \cdot \mathbf{p}$$

Leistungsflußberechnung: Newton-Raphson-Iteration, Beispiel (I)



- Leiterimpedanz: $Z' = (0,157 + j0,410) \Omega/\text{km}$
- Bezugsspannung: $U_B = 110 \text{ kV}$
- Bezugsleistung: $S_B = 100 \text{ MVA}$
- Knoten 4 ist der Potentialknoten mit $\underline{u}_4 = 1$ oder $\underline{U}_4 = 110/\sqrt{3} \text{ kV}$
- Vorgegebene Leistungen
 $P_1 = 150 \text{ MW}, \cos \varphi = 0,93$
 $P_2 = 75 \text{ MW}, \cos \varphi = 0,93$
 $P_3 = -180 \text{ MW}, \cos \varphi = 0,93$
 (zufließende induktive Leistung)

$$\underline{Y}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{g}_V \cdot (\underline{u}_V - \underline{u}_n) = \underline{i}_V$$

$$\begin{pmatrix} -25 & 5 & 10 \\ 5 & -9 & 4 \\ 10 & 4 & -20 \end{pmatrix} \cdot e^{-j69,047^\circ} \cdot \begin{pmatrix} \underline{u}_1 - \underline{u}_4 \\ \underline{u}_2 - \underline{u}_4 \\ \underline{u}_3 - \underline{u}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{i}_1 \\ \underline{i}_2 \\ \underline{i}_3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{s}_1 = \frac{P_1}{S_B} + j \cdot \frac{P_1 \cdot \tan(\varphi)}{S_B} = 1,5 + j \cdot 0,593$$

$$\underline{s}_2 = \frac{P_2}{S_B} + j \cdot \frac{P_2 \cdot \tan(\varphi)}{S_B} = 0,75 + j \cdot 0,296$$

$$\underline{s}_3 = -\left(\frac{P_3}{S_B} + j \cdot \frac{P_3 \cdot \tan(\varphi)}{S_B} \right) = -1,8 - j \cdot 0,711$$

Leistungsflußberechnung: Newton-Raphson-Iteration, Beispiel (II)

Sollwerte: $\underline{s}_1 = 1,5 + j \cdot 0,593$ $\underline{s}_2 = 0,75 + j \cdot 0,296$ $\underline{s}_3 = -1,8 - j \cdot 0,711$

<u>Spannungen:</u>	$u1$	$u2$	$u3$
0. Schritt:	1.0000	1.0000	1.0000
1. Schritt:	0.9503 - 0.0501i	0.9210 - 0.0764i	1.0256 + 0.0292i
2. Schritt:	0.9316 - 0.0531i	0.8913 - 0.0833i	1.0069 + 0.0293i
3. Schritt:	0.9310 - 0.0533i	0.8902 - 0.0838i	1.0064 + 0.0293i

<u>Ströme:</u>	$i1$	$i2$	$i3$
0. Schritt:	0	0	0
1. Schritt:	1.4812 - 0.6142i	0.7185 - 0.3296i	-1.7723 + 0.7404i
2. Schritt:	1.5669 - 0.7238i	0.7992 - 0.4052i	-1.8040 + 0.6561i
3. Schritt:	1.5696 - 0.7267i	0.8041 - 0.4082i	-1.8076 + 0.6538i

<u>Leistungen:</u>	$s1$	$s2$	$s3$
0. Schritt:	0	0	0
1. Schritt:	1.4384 + 0.5094i	0.6870 + 0.2487i	-1.7961 - 0.8111i
2. Schritt:	1.4982 + 0.5910i	0.7461 + 0.2945i	-1.7973 - 0.7135i
3. Schritt:	1.5000 + 0.5930i	0.7500 + 0.2960i	-1.8000 - 0.7110i

Leistungsflußberechnung: Newton-Raphson-Iteration, Beispiel (III)

Entkoppeltes Verfahren

Spannungen: $u1$

0. Schritt: 1.0000
1. Schritt: 0.9694 - 0.0692i
2. Schritt: 0.9228 - 0.0624i
3. Schritt: 0.9246 - 0.0510i
4. Schritt: 0.9324 - 0.0518i
5. Schritt: 0.9317 - 0.0536i
6. Schritt: 0.9308 - 0.0534i
7. Schritt: 0.9309 - 0.0532i
8. Schritt: 0.9310 - 0.0532i

Ströme: $i1$

0. Schritt: 0
1. Schritt: 1.7170 - 0.0485i
2. Schritt: 1.7582 - 0.8133i
3. Schritt: 1.5557 - 0.8168i
4. Schritt: 1.5481 - 0.7111i
5. Schritt: 1.5722 - 0.7175i
6. Schritt: 1.5715 - 0.7289i
7. Schritt: 1.5692 - 0.7274i
8. Schritt: 1.5695 - 0.7265i

Leistungen: $s1$

0. Schritt: 0
1. Schritt: 1.6678 + 0.0717i
2. Schritt: 1.6733 + 0.6407i
3. Schritt: 1.4801 + 0.6759i
4. Schritt: 1.4803 + 0.5828i
5. Schritt: 1.5032 + 0.5842i
6. Schritt: 1.5017 + 0.5945i
7. Schritt: 1.4996 + 0.5937i
8. Schritt: 1.4999 + 0.5928i

$u2$

1.0000
0.9499 - 0.1066i
0.8804 - 0.0948i
0.8818 - 0.0816i
0.8916 - 0.0825i
0.8908 - 0.0840i
0.8901 - 0.0838i
0.8902 - 0.0838i
0.8902 - 0.0838i

$i2$

0
0.8455 - 0.0567i
0.8594 - 0.4352i
0.8061 - 0.4382i
0.8047 - 0.4039i
0.8038 - 0.4085i
0.8028 - 0.4084i
0.8042 - 0.4075i
0.8044 - 0.4082i

$s2$

0
0.8092 + 0.0363i
0.7979 + 0.3017i
0.7466 + 0.3207i
0.7508 + 0.2937i
0.7503 + 0.2964i
0.7488 + 0.2962i
0.7500 + 0.2954i
0.7503 + 0.2960i

$u3$

1.0000
1.0144 + 0.0390i
1.0057 + 0.0264i
1.0026 + 0.0293i
1.0069 + 0.0309i
1.0070 + 0.0291i
1.0063 + 0.0290i
1.0063 + 0.0294i
1.0064 + 0.0294i

$i3$

0
-2.0564 + 0.0637i
-1.9192 + 0.7264i
-1.7853 + 0.6857i
-1.8152 + 0.6413i
-1.8091 + 0.6566i
-1.8043 + 0.6552i
-1.8077 + 0.6527i
-1.8082 + 0.6537i

Sollwerte:

$$\underline{s}_1 = 1,5 + j \cdot 0,593$$

$$\underline{s}_2 = 0,75 + j \cdot 0,296$$

$$\underline{s}_3 = -1,8 - j \cdot 0,711$$

Optimal Power Flow (OPF)

Leistungsflussgleichung: Berechnung von Spannungen und Leistungen bei Vorgabe von Lasten (P,Q), Kraftwerken (P,U) und Bilanzknoten ($u=1$, $\varphi=0$)

Frage: Wirtschaftliches Optimum, d. h. welche Kraftwerke sollen eingesetzt werden?

Randbedingung: Wirk- und Blindleistung muss sicher zur Verfügung stehen

Aufgabe: Minimierung der Gesamtkosten
= Summe der Kosten der einzelnen KW

$$\min_{P_{G,i}} \{C(p_{G,i})\} = \min_{P_{G,i}} \left\{ \sum_{i=1}^{N_G} K_i(p_{G,i}) \right\}$$

Nebenbedingungen: Leistungsflussgleichungen
(Bilanz aus eingespeister und abfließender Wirk- und Blindleistung erfüllt sein)

$$p_{L,i} - p_{G,i} - p_i = p_{L,i} - p_{G,i} - u_i \cdot \left[\sum_{k=1}^n g_{ik} \cdot u_k \cdot \cos(\varphi_i - \varphi_k - \alpha_{ik}) \right] = 0$$

$$q_{L,i} - q_{G,i} - q_i = q_{L,i} - q_{G,i} - u_i \cdot \left[\sum_{k=1}^n g_{ik} \cdot u_k \cdot \sin(\varphi_i - \varphi_k - \alpha_{ik}) \right] = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$p_{L,i}$, $p_{G,i}$, $q_{L,i}$ und $q_{G,i}$ sind positiv

Optimal Power Flow (OPF)

Weitere Nebenbedingungen durch:

- Begrenzung durch Kraftwerke (P,Q)
- Einhaltung des Spannungsbandes

$$p_{G,i,min} \leq p_{G,i} \leq p_{G,i,max}$$

$$q_{G,i,min} \leq q_{G,i} \leq q_{G,i,max}$$

$$u_{i,min} \leq u_i \leq u_{i,max}$$

allgemeine mathematische Formulierung für
dieses nichtlineare Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}} \{f(\mathbf{x})\} \\ \text{mit} \quad & g(\mathbf{x}) = 0 \\ & \mathbf{x}_{min} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{max} \end{aligned}$$

Sonderfall für die nichtlineare Zielfunktion:
quadratische Modellierung der Kostenfunktion

$$C_{ges} = \sum_{i=1}^{N_G} K_{i,ges}(p_{G,i}) = \sum_{i=1}^{N_G} a_i + b_i \cdot p_{G,i} + c_i \cdot p_{G,i}^2$$

Berücksichtigung nur der
variablen Kosten

$$\begin{aligned} C(p_{G,i}) &= C_{ges}(p_{G,i}) - C_{ges}(0) \\ &= a_i + b_i \cdot p_{G,i} + c_i \cdot p_{G,i}^2 - a_i = b_i \cdot p_{G,i} + c_i \cdot p_{G,i}^2 = K_i(p_{G,i}) \end{aligned}$$

OPF: einfaches Verfahren ohne Netzverluste

Allgemein gilt:
$$\sum_{i=1}^{N_G} p_{G,i} - \sum_{k=1}^n p_{L,k} - p_V = 0$$

Definition einer modifizierten Kostenfunktion:

$$C^* = \sum_{i=1}^{N_G} K_i(p_{G,i}) - \lambda \left(\sum_{i=1}^{N_G} p_{G,i} - \sum_{k=1}^n p_{L,k} \right)$$

λ : Lagrange'scher Multiplikator

$$= \sum_{i=1}^{N_G} b_i \cdot p_{G,i} + c_i \cdot p_{G,i}^2 - \lambda \left(\sum_{i=1}^{N_G} p_{G,i} - p_L \right)$$

Bedingungen für ein Minimum:

$$\frac{\partial}{\partial p_{G,i}} C^* = \frac{d}{dp_{G,i}} \left(\sum_{i=1}^{N_G} b_i \cdot p_{G,i} + c_i \cdot p_{G,i}^2 \right) - \lambda = b_i + 2 \cdot c_i \cdot p_{G,i} - \lambda \quad i = 1, 2, \dots, N_G$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} C^* = \sum_{i=1}^{N_G} p_{G,i} - p_L = 0$$

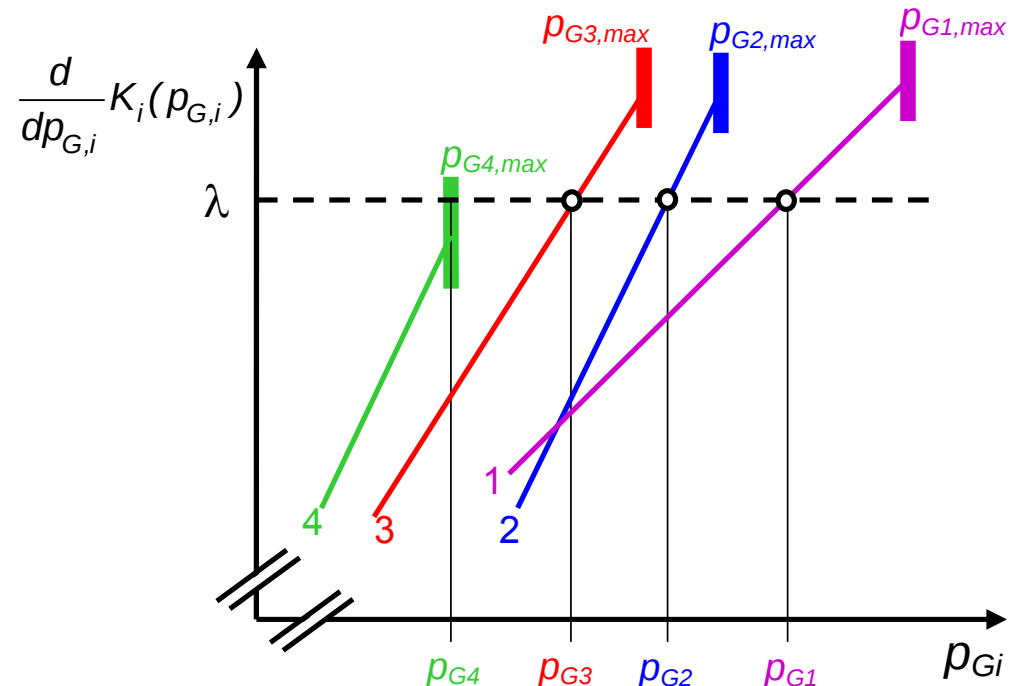
In Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot c_1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 2 \cdot c_2 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 \cdot c_{N_G} & -1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{G1} \\ p_{G2} \\ \vdots \\ p_{GN_G} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1 \\ -b_2 \\ \vdots \\ -b_{N_G} \\ p_L \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{b}$$

OPF: einfaches Verfahren ohne Netzverluste

$d/dp_{Gi}(K_i)$ sind die Zuwachskosten

Bei Ansatz einer quadratischen
Kostenfunktion sind die Zuwachskosten
linear in p_{Gi}



Die für alle Kraftwerke identischen
Zuwachskosten λ (= Lagrange-Multiplikator)
sind so zu wählen, dass die Summe aller
Einspeisungen die Summe p_L der Lasten ergibt

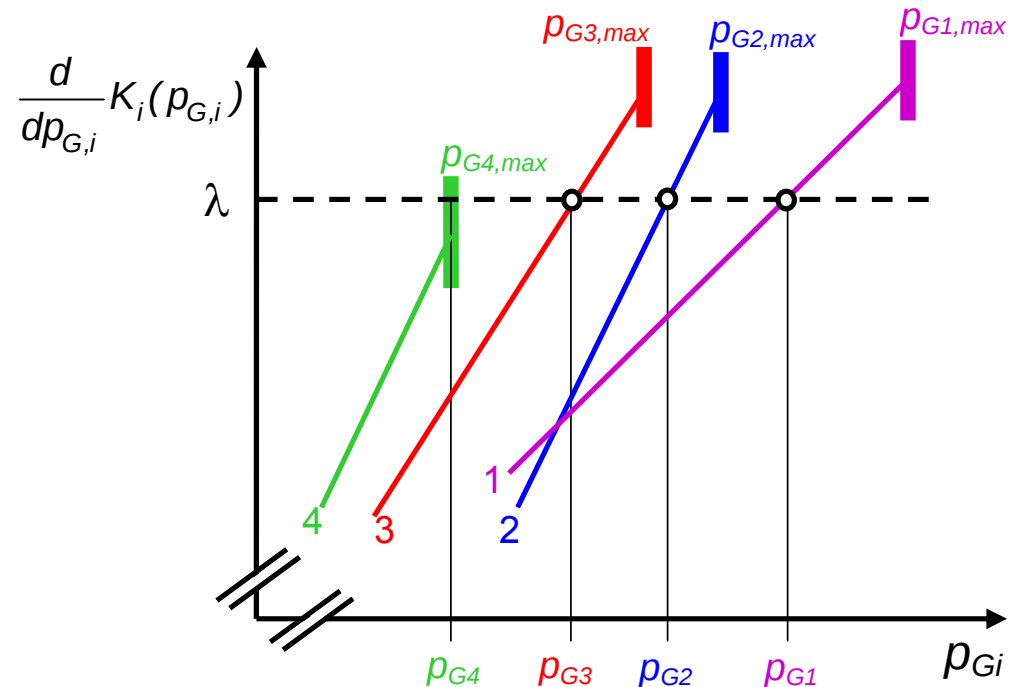
OPF: einfaches Verfahren ohne Netzverluste

Grenzbedingungen für die Einspeiseleistung

- Berechnung erfolgt zunächst ohne Grenzbedingung
- Hat ein KW seine Maximalleistung erreicht, wird es auf diesem Wert festgehalten und die Optimierung mit den restlichen KW fortgesetzt

$$b_i + 2 \cdot c_i \cdot p_{G,i} - \lambda = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N_{opt}$$

$$\sum_{i=1}^{N_{opt}} p_{G,i} + \sum_{i=N_{opt}+1}^{N_G} p_{G,i,max} - p_L = 0$$



$$\begin{bmatrix} 2 \cdot c_1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 2 \cdot c_2 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 \cdot c_{N_G} & -1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{G1} \\ p_{G2} \\ \vdots \\ p_{GN_G} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1 \\ -b_2 \\ \vdots \\ -b_{N_G} \\ p_L - \sum_{i=N_{opt}+1}^{N_G} p_{G,i,max} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{red} \cdot \mathbf{X}_{red} = \mathbf{b}_{red}$$

Beispiel 4

Kostenstruktur und
Summenleistung

$$C(P_{G,1}) = 6 + 0.5 \cdot P_{G,1} + 0.0006 \cdot P_{G,1}^2$$

$$C(P_{G,2}) = 5 + 0.6 \cdot P_{G,2} + 0.0005 \cdot P_{G,2}^2$$

$$C(P_{G,3}) = 3 + 0.4 \cdot P_{G,3} + 0.0007 \cdot P_{G,3}^2$$

$$P_{G,1} + P_{G,2} + P_{G,3} = 800$$

Beschränkungen:

$$100 \text{ MW} \leq P_{G,1} \leq 250 \text{ MW}$$

$$100 \text{ MW} \leq P_{G,2} \leq 250 \text{ MW}$$

$$100 \text{ MW} \leq P_{G,3} \leq 350 \text{ MW}$$

Zu lösen:

$$\begin{bmatrix} 0.0012 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0.001 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0.0014 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{G1} \\ P_{G2} \\ P_{G3} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.6 \\ -0.4 \\ 800 \end{bmatrix}$$



$$P_{G,1} = 271.03 \text{ MW}$$

$$P_{G,2} = 225.23 \text{ MW}$$

$$P_{G,3} = 303.74 \text{ MW}$$

$$\lambda = 0.82523$$

P_{G1} auf 250 MW festhalten und LGS modifizieren:

$$\begin{bmatrix} 0.001 & 0 & -1 \\ 0 & 0.0014 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{G2} \\ P_{G3} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6 \\ -0.4 \\ 550 \end{bmatrix}$$



$$P_{G,1} = 250 \text{ MW}$$

$$P_{G,2} = 237.5 \text{ MW}$$

$$P_{G,3} = 312.5 \text{ MW}$$

$$\lambda = 0.8375$$

OPF: iteratives Verfahren mit Netzverlusten

Modifizierte Kostenfunktion muss um die Summe der Netzverluste (p_V) erweitert werden

$$C^*(p_{G,i}) = \sum_{i=1}^{N_G} K_i(p_{G,i}) - \lambda \left(\sum_{i=1}^{N_G} p_{G,i} - \sum_{k=1}^N p_{L,k} - p_V \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N_G} a_i + b_i \cdot p_{G,i} + c_i \cdot p_{G,i}^2 - \lambda \left(\sum_{i=1}^{N_G} p_{G,i} - p_L - p_V \right)$$

Bedingungen für ein Minimum

$$\frac{\partial}{\partial p_{G,i}} C^*(p_{G,i}) = \frac{d}{dp_{G,i}} K_i(p_{G,i}) - \lambda + \lambda \cdot \frac{\partial p_V}{\partial p_{G,i}} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N_G$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} C^*(p_{G,i}) = \sum_{i=1}^{N_G} p_{G,i} - p_L - p_V = 0$$

Annahme: Last an jedem Knoten soll konstant bleiben
 $\partial p_{L,i} = 0$

$$\frac{\partial p_V}{\partial p_{G,i}} = \frac{\partial p_V}{\partial (p_i - p_{L,i})} = \frac{\partial p_V}{\partial p_i}$$

OPF: iteratives Verfahren mit Netzverlusten

Berechnung der Verlustleistung in einem Netz unter der Voraussetzung, dass keine Admittanzen gegen Erde vorliegen ($\underline{y}_0 = 0$), Herleitung siehe Skript

$$p_V = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{r_{jk}}{u_j \cdot u_k} \cdot \left[(p_j \cdot p_k + q_j \cdot q_k) \cdot \cos(\varphi_j - \varphi_k) + (q_j \cdot p_k - p_j \cdot q_k) \cdot \sin(\varphi_j - \varphi_k) \right] \\ + u_n \cdot \sum_{j=1}^n \frac{1}{u_j} \cdot (p_j \cdot \cos \varphi_j + q_j \cdot \sin \varphi_j)$$

$p_{j,k}$ und $q_{j,k}$ sind die in die einzelnen Knoten eingespeisten Wirk- und Blindleistungen
 u_j sind die Beträge der Knotenspannungen; φ_j sind die Phasenwinkel in Bezug auf $\varphi_n = 0$

$$\frac{\partial p_V}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial p_i} \left\{ \frac{r_{jk}}{u_j \cdot u_k} \cdot \left[(p_j \cdot p_k + q_j \cdot q_k) \cdot \cos(\varphi_j - \varphi_k) + (q_j \cdot p_k - p_j \cdot q_k) \cdot \sin(\varphi_j - \varphi_k) \right] \right\} \\ + u_n \cdot \sum_{j=1}^n \frac{1}{u_j} \cdot \frac{\partial}{\partial p_i} \left\{ (p_j \cdot \cos \varphi_j + q_j \cdot \sin \varphi_j) \right\} \\ = 2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{r_{ik}}{u_i \cdot u_k} \cdot (p_k \cdot \cos(\varphi_i - \varphi_k) - q_k \cdot \sin(\varphi_i - \varphi_k)) + u_n \frac{\cos \varphi_i}{u_i}$$

*Terme der Doppelsumme
hinschreiben und dann
z. B. nach p_2 ableiten*

OPF: iteratives Verfahren mit Netzverlusten

Iteration zur Berechnung der Optimierung:

- 1) Berechnung des Leistungsflusses für das gegebene Netz unter Berücksichtigung von Leistungsknoten, Generatorknoten und Bilanzknoten
- 2) Berechnung der Netzverluste p_V und der Inkremental-Netzverluste $D_i = \partial p_V / \partial p_{Gi}$.

$$p_V = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{r_{jk}}{u_j \cdot u_k} \cdot \left[(p_j \cdot p_k + q_j \cdot q_k) \cdot \cos(\varphi_j - \varphi_k) + (q_j \cdot p_k - p_j \cdot q_k) \cdot \sin(\varphi_j - \varphi_k) \right] + \underline{u}_n \cdot \sum_{j=1}^n \frac{1}{u_j} \cdot (p_j \cdot \cos \varphi_j + q_j \cdot \sin \varphi_j)$$

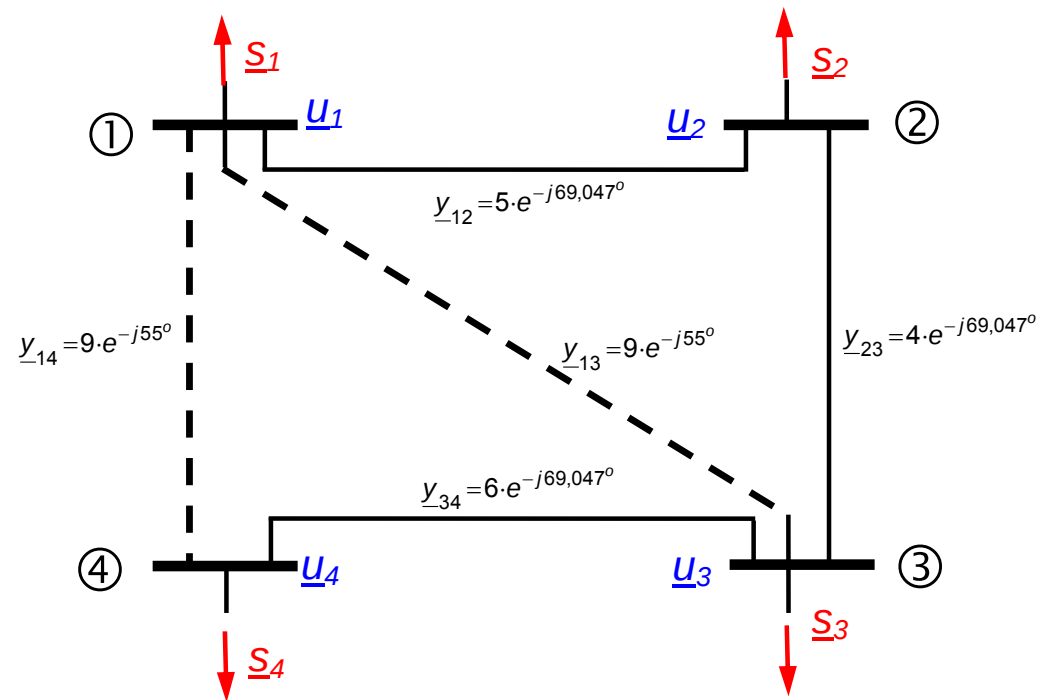
$$D_i = \frac{\partial p_V}{\partial p_i} = 2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{r_{ik}}{u_i \cdot u_k} \cdot (p_k \cdot \cos(\varphi_i - \varphi_k) - q_k \cdot \sin(\varphi_i - \varphi_k)) + u_n \frac{\cos \varphi_i}{u_i}$$

- 3) Lösen des Gleichungssystems:

$$b_i + 2 \cdot c_i \cdot p_{G,i} + \lambda [D_i - 1] = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N_G$$

$$\sum_{i=1}^{N_G} p_{G,i} - p_L - p_V = 0$$

Beispiel 5



$$y_{01} = j \cdot 0,63$$

$$y_{03} = j \cdot 0,63 / 2 = j \cdot 0,315$$

$$y_{04} = j \cdot 0,63 / 2 = j \cdot 0,315$$

Vorgabe::

$$\underline{s}_1 = 1,2 + j \cdot 0,593$$

$$\underline{s}_2 = 0,6 + j \cdot 0,2$$

$$\underline{g} = \begin{pmatrix} -(\underline{y}_{01} + \underline{y}_{12} + \underline{y}_{13} + \underline{y}_{14}) & \underline{y}_{12} & \underline{y}_{13} & \underline{y}_{14} \\ \underline{y}_{12} & -(\underline{y}_{12} + \underline{y}_{23}) & \underline{y}_{23} & 0 \\ \underline{y}_{13} & \underline{y}_{23} & -(\underline{y}_{03} + \underline{y}_{13} + \underline{y}_{23} + \underline{y}_{34}) & \underline{y}_{34} \\ \underline{y}_{14} & 0 & \underline{y}_{34} & -(\underline{y}_{04} + \underline{y}_{14} + \underline{y}_{34}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 22,3507 \cdot e^{j122,815^\circ} & 5 \cdot e^{-j69,047^\circ} & 9 \cdot e^{-j55^\circ} & 9 \cdot e^{-j55^\circ} \\ 5 \cdot e^{-j69,047^\circ} & 9 \cdot e^{j110,953^\circ} & 46 \cdot e^{-j69,047^\circ} & 0 \\ 9 \cdot e^{-j55^\circ} & 4 \cdot e^{-j69,047^\circ} & 18,5793 \cdot e^{j118,055^\circ} & 6 \cdot e^{-j69,047^\circ} \\ 9 \cdot e^{-j55^\circ} & 0 & 6 \cdot e^{-j69,047^\circ} & 14,6183 \cdot e^{j119,994^\circ} \end{pmatrix}$$

Kostenstruktur KW::

$$C(p_3) = 6 + 0.5 \cdot p_3 + 0.1 \cdot p_3^2$$

$$C(p_4) = 5 + 0.6 \cdot p_4 + 0.05 \cdot p_4^2$$

LGS::

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0 & D_3 - 1 \\ 0 & 0.1 & D_4 - 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.6 \\ 1.8 + p_v \end{bmatrix}$$

Beispiel 5

<u>1. Schritt</u>				
Ausgangspunkt:		$p_3 = 1.2$		
Spannungen:	u_1	u_2	u_3	u_4
	$0.9451 - 0.0578i$	$0.9158 - 0.0850i$	$1.0000 + 0.0032i$	1.0000
Leistungen:	p_1	p_2	p_3	p_4
	$1.2000 + 0.5930i$	$0.6000 + 0.2000i$	$-1.2000 + 0.0401i$	$-0.6917 + 0.2022i$
Lösung der Optimierung:		$p_3 = 0.9663$	$p_4 = 0.9254$	$\lambda = 0.7253$
<u>2. Schritt</u>				
Spannungen:	u_1	u_2	u_3	u_4
	$0.9438 - 0.0705i$	$0.9140 - 0.1019i$	$0.9998 - 0.0211i$	1.0000
Leistungen:	p_1	p_2	p_3	p_4
	$1.2000 + 0.5930i$	$0.6000 + 0.2000i$	$-0.9663 - 0.0716i$	$-0.9285 + 0.3089i$
Lösung der Optimierung:		$p_3 = 1.0150$	$p_4 = 0.8798$	$\lambda = 0.7287$
<u>3. Schritt</u>				
Spannungen:	u_1	u_2	u_3	u_4
	$0.9441 - 0.0678i$	$0.9144 - 0.0984i$	$0.9999 - 0.0160i$	1.0000
Leistungen:	p_1	p_2	p_3	p_4
	$1.2000 + 0.5930i$	$0.6000 + 0.2000i$	$-1.0150 - 0.0477i$	$-0.8787 + 0.2870i$
Lösung der Optimierung:		$p_3 = 1.0046$	$p_4 = 0.8891$	$\lambda = 0.7279$
Gesamtverluste im Netz:	$p_v = -0.0939$ (negativ, d. h. p_v muss eingespeist werden)			

Quadratische Optimierung mit DC-Leistungsfluss

Die variablen Kosten eines Kraftwerks $C = \sum_{i=1}^{N_G} K_{i,ges}(p_{G,i}) = \sum_{i=1}^{N_G} b_i \cdot p_{G,i} + c_i \cdot p_{G,i}^2 = \sum_{i=1}^n b_i \cdot p_{G,i} + c_i \cdot p_{G,i}^2$

sind darstellbar durch $C(p_{G,i}) = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{x}$

Dies gilt nur für einen quadratischen Ansatz der Kostenfunktion!

Optimierungsprobleme mit quadratischer Zielfunktion und linearen Nebenbedingungen lassen sich geschlossen lösen

$$\min_{\mathbf{x}} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{x} \right\} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} &\leq \mathbf{d} \\ \mathbf{x}_{min} &\leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{max} \end{aligned}$$

Matrizen und Vektoren zur Berechnung der Kostenfunktion:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2c_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 2c_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 2c_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2n \times 2n}$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

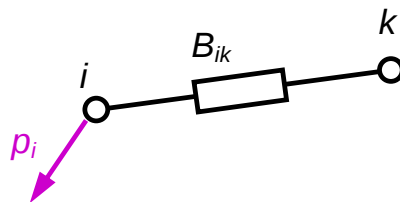
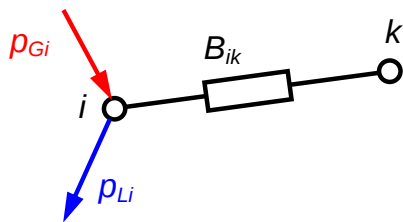
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} p_{G1} \\ \vdots \\ p_{G,n-1} \\ p_{G,n} \\ \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \\ \varphi_n \end{bmatrix}$$

Quadratische Optimierung mit DC-Leistungsfluss

DC-Leistungsfluss
$$p_i = \sum_{k=1}^n B_{ik} \cdot (\varphi_i - \varphi_k) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Für jeden Knoten gilt: Differenz aus eingespeister und abgegebener Leistung fließt in den Knoten (positiv oder negativ)!

$$p_{Li} - p_{Gi} = p_i = \sum_{k=1}^n B_{ik} \cdot (\varphi_i - \varphi_k) \quad \text{oder} \quad p_{Gi} + \sum_{k=1}^n B_{ik} \cdot (\varphi_i - \varphi_k) = p_{Li} \quad i = 1, 2, \dots, n$$



in Matrixschreibweise: $\mathbf{p}_G + \mathbf{B}_{mod} \cdot \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{p}_L$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & 0 & 0 & \sum_{k=1}^n B_{1,k} - B_{11} & \dots & -B_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 & -B_{n-1,1} & \dots & \sum_{k=1}^n B_{n-1,k} - B_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} & -B_{n,1} & \dots & -B_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A} \quad n \times 2n} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} p_{G1} \\ \vdots \\ p_{G,n-1} \\ p_{G,n} \\ \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \\ \varphi_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x} \quad 2n \times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} p_{L1} \\ p_{L2} \\ \vdots \\ p_{Ln} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b} \quad n \times 1}$$

DC-Leistungsfluss
ermöglicht lineare
Gleichung $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$

mit
$$a_{jj} = \begin{cases} 0 & \text{falls } p_{G,j} = 0 \\ 1 & \text{falls } p_{G,j} \neq 0 \end{cases}$$

Beispiel 6

110-kV-Netz wie Beispiel 5

$$\underline{\mathbf{g}} = \begin{pmatrix} 22,3507 \cdot e^{j122,815^\circ} & 5 \cdot e^{-j69,047^\circ} & 9 \cdot e^{-j55^\circ} & 9 \cdot e^{-j55^\circ} \\ 5 \cdot e^{-j69,047^\circ} & 9 \cdot e^{j110,953^\circ} & 46 \cdot e^{-j69,047^\circ} & 0 \\ 9 \cdot e^{-j55^\circ} & 4 \cdot e^{-j69,047^\circ} & 18,5793 \cdot e^{j118,055^\circ} & 6 \cdot e^{-j69,047^\circ} \\ 9 \cdot e^{-j55^\circ} & 0 & 6 \cdot e^{-j69,047^\circ} & 14,6183 \cdot e^{j119,994^\circ} \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{g}}_{DC} = \text{Im}\{\underline{\mathbf{g}}\} = \begin{pmatrix} 18.784 & -4.669 & -7.372 & -7.372 \\ -4.669 & 8.405 & -3.735 & 0 \\ -7.372 & -3.735 & 16.396 & -5.603 \\ -7.372 & 0 & -5.603 & 12.660 \end{pmatrix}$$

Kostenstruktur KW:

$$C(p_3) = 6 + 0.5 \cdot p_3 + 0.1 \cdot p_3^2$$

$$C(p_4) = 5 + 0.6 \cdot p_4 + 0.05 \cdot p_4^2$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2c_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 2c_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 2c_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} p_{G1} \\ \vdots \\ p_{G,n-1} \\ p_{G,n} \\ \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \\ \varphi_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{8 \times 8} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0.6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} P_{G1} \\ P_{G2} \\ P_{G3} \\ P_{G4} \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \varphi_4 = 0$$

Beispiel 6

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & 0 & \sum_{k=1}^n B_{1,k} - B_{11} & \cdots & -B_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 & -B_{n-1,1} & \cdots & \sum_{k=1}^n B_{n-1,k} - B_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} & -B_{n,1} & \cdots & -B_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} p_{G1} \\ \vdots \\ p_{G,n-1} \\ p_{G,n} \\ \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \\ \varphi_n \end{bmatrix}}_{\substack{x \\ 2n \times 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} p_{L1} \\ p_{L2} \\ \vdots \\ p_{Ln-1} \\ p_{Ln} \end{bmatrix}}_{\substack{b \\ n \times 1}}$$

mit $a_{jj} = \begin{cases} 0 & \text{falls } p_{G,j} = 0 \\ 1 & \text{falls } p_{G,j} \neq 0 \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -19.414 & 4.669 & 7.372 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.669 & -8.405 & 3.735 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7.372 & 3.735 & -16.711 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7.372 & 0 & 5.603 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 8} \quad b = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0.6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Beispiel 6

Lösung mit MATLAB:

$[x, fval] = \text{quadprog}(H, f, C, d, A, b, x_{min}, x_{max})$

$$\min_x \left\{ \frac{1}{2} \cdot x^T \cdot H \cdot x + f^T \cdot x \right\}$$

Ohne Ungleichungsbedingung:

$[x, fval] = \text{quadprog}(H, f, [], [], A, b, x_{min}, x_{max})$

mit $A \cdot x = b$

$$C \cdot x \leq d$$

$$x_{min} \leq x \leq x_{max}$$

$$x = \begin{bmatrix} P_{G1} \\ P_{G2} \\ P_{G3} \\ P_{G4} \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.9333 \\ 0.8667 \\ -0.1024 \\ -0.1371 \\ -0.0199 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{0.9333} \\ \mathbf{0.8667} \\ -5.866^\circ \\ -7.858^\circ \\ -1.144^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$fval = C_{var}(P_{G,i}) = \frac{1}{2} \cdot x^T \cdot H \cdot x + f^T \cdot x = 1.11133$$

Lösung der Optimierung aus Beispiel 5:

$$\mathbf{p_3 = 1.0046}$$

$$\mathbf{p_4 = 0.8891}$$

- 1) Winkel sind klein, DC-Leistungsfluss war gerechtfertigt.
- 2) Abweichungen sind trotz DC-Leistungsfluss (Vernachlässigung der ohmschen Widerstände) gering (einige %).

Optimierung mit AC-Leistungsfluss

Allgemeine
Problemformulierung

$$\min_{p_{G,i}} \left\{ \sum_{i=1}^{N_G} K_{i,ges}(p_{G,i}) \right\} = \min_{p_{G,i}} \left\{ \sum_{i=1}^n b_i \cdot p_{G,i} + c_i \cdot p_{G,i}^2 + d_i \cdot p_{G,i}^3 + \dots \right\} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{mit} \quad p_{L,i} - p_{G,i} - u_i \cdot \left[\sum_{k=1}^n g_{ik} \cdot u_k \cdot \cos(\varphi_i - \varphi_k - \alpha_{ik}) \right] = 0$$

$$q_{L,i} - q_{G,i} - u_i \cdot \left[\sum_{k=1}^n g_{ik} \cdot u_k \cdot \sin(\varphi_i - \varphi_k - \alpha_{ik}) \right] = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$p_{G,i,min} \leq p_{G,i} \leq p_{G,i,max}$$

$$q_{G,i,min} \leq q_{G,i} \leq q_{G,i,max}$$

$$u_{i,min} \leq u_i \leq u_{i,max}$$

Zielfunktion und Nebenbedingungen (Leistungsflussgleichungen des AC-Netzes) sind nichtlinear!

Es existieren zahlreiche Lösungsverfahren für diese Problemstellung.

Optimierung mit AC-Leistungsfluss: Lösung mit MATPOWER

Problemdefinition: Funktion, in diesem Fall “[case_skript_BEE](#)”

Diese Funktion enthält die 3 Bereiche

mpc.bus zur Beschreibung der Knoten und ihrer Leistungsabgänge

mpc.gen zur Beschreibung der Kraftwerke und Generatoren

mpc.branch zur Beschreibung des Netzes

sowie

mpc.gencost zur Beschreibung der Kosten der einzelnen Kraftwerke u. Generatoren

%% bus data

% **bus_i type Pd Qd Gs Bs area Vm Va baseKV zone Vmax Vmin**

mpc.bus = [

1 1 120 59.3 0 0 1 1 0 110 1 1.1 0.9;

2 1 60 20 0 0 1 1 0 110 1 1.1 0.9;

3 2 0 0 0 0 1 1 0 110 1 1.0 1.0;

4 3 0 0 0 0 1 1 0 110 1 1.0 1.0;];

name	column	description
BUS_I	1	bus number (positive integer)
BUS_TYPE	2	bus type (1 = PQ, 2 = PV, 3 = ref, 4 = isolated)

Optimierung mit AC-Leistungsfluss: Lösung mit MATPOWER

mpc.gen Beschreibung der Kraftwerke und Generatoren

mpc.branch Beschreibung des Netzes

%% generator data

% bus Pg Qg Qmax Qmin **Vg mBase** status Pmax Pmin Pc1 Pc2 Qc1min
Qc1max Qc2min Qc2max ramp_agc ramp_10 ramp_30 ramp_q apf

mpc.gen = [

```
3 100 0 300 -300 1 100 1 500 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;  
4 100 0 300 -300 1 100 1 500 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;];
```

%% branch data

% fbus tbus r x b rateA rateB rateC ratio angle status angmin angmax

mpc.branch = [

```
1 2 0.07152 0.18677 0 500 500 500 0 0 1 -360 360;  
1 3 0.06373 0.09101 0.63 500 500 500 0 0 1 -360 360;  
1 4 0.06373 0.09101 0.63 500 500 500 0 0 1 -360 360;  
3 4 0.05960 0.15564 0 500 500 500 0 0 1 -360 360;  
2 3 0.08940 0.23346 0 500 500 500 0 0 1 -360 360;];
```

Optimierung mit AC-Leistungsfluss: Lösung mit MATPOWER

mpc.gencost Beschreibung der Kosten der einzelnen Kraftwerke und Generatoren

$$C(p_3) = 6 + 0.5 \cdot p_3 + 0.1 \cdot p_3^2$$

$$C(p_4) = 5 + 0.6 \cdot p_4 + 0.05 \cdot p_4^2$$

normierte Darstellung

$$C(P_3) = 6 + 0.5 \cdot p_3 + 0.1 \cdot p_3^2 = 6 + 0.5 \cdot \frac{P_3}{S_B} + 0.1 \cdot \left(\frac{P_3}{S_B} \right)^2 = 6 + 0.005 \cdot P_3 + 1 \cdot 10^{-5} \cdot P_3^2$$

entnormierte
Darstellung

$$C(P_4) = 5 + 0.6 \cdot p_4 + 0.05 \cdot p_4^2 = 5 + 0.6 \cdot \frac{P_4}{S_B} + 0.05 \cdot \left(\frac{P_4}{S_B} \right)^2 = 5 + 0.006 \cdot P_4 + 5 \cdot 10^{-6} \cdot P_4^2$$

```
mpc.gencost = [
    2  0  0  3  1e-5 0.005 6;
    2  0  0  3  5e-6 0.006 5];
```

name	column	description
MODEL	1	cost model, 1 = piecewise linear, 2 = polynomial
STARTUP	2	startup cost in US dollars*
SHUTDOWN	3	shutdown cost in US dollars*
NCOST	4	number of cost coefficients for polynomial cost function, or number of data points for piecewise linear
COST	5	parameters defining total cost function $f(p)$ begin in this column, units of f and p are \$/hr and MW (or MVar), respectively (MODEL = 1) $\Rightarrow$ $p_0, f_0, p_1, f_1, \dots, p_n, f_n$ where $p_0 < p_1 < \dots < p_n$ and the cost $f(p)$ is defined by the coordinates $(p_0, f_0), (p_1, f_1), \dots, (p_n, f_n)$ of the end/break-points of the piecewise linear cost (MODEL = 2) $\Rightarrow$ $c_n, \dots, c_1, c_0$ $n + 1$ coefficients of n -th order polynomial cost, starting with highest order, where cost is $f(p) = c_n p^n + \dots + c_1 p + c_0$

† If **gen** has n_g rows, then the first n_g rows of **gencost** contain the costs for active power produced by the corresponding generators. If **gencost** has $2n_g$ rows, then rows $n_g + 1$ through $2n_g$ contain the reactive power costs in the same format.

* Not currently used by any MATPOWER functions.

Optimierung mit AC-Leistungsfluss

Allgemeine
Problemformulierung

$$\min_{p_{G,i}} \left\{ \sum_{i=1}^{N_G} K_{i,ges}(p_{G,i}) \right\} = \min_{p_{G,i}} \left\{ \sum_{i=1}^n b_i \cdot p_{G,i} + c_i \cdot p_{G,i}^2 + d_i \cdot p_{G,i}^3 + \dots \right\} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{mit} \quad p_{L,i} - p_{G,i} - u_i \cdot \left[\sum_{k=1}^n g_{ik} \cdot u_k \cdot \cos(\varphi_i - \varphi_k - \alpha_{ik}) \right] = 0$$

$$q_{L,i} - q_{G,i} - u_i \cdot \left[\sum_{k=1}^n g_{ik} \cdot u_k \cdot \sin(\varphi_i - \varphi_k - \alpha_{ik}) \right] = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$p_{G,i,min} \leq p_{G,i} \leq p_{G,i,max}$$

$$q_{G,i,min} \leq q_{G,i} \leq q_{G,i,max}$$

$$u_{i,min} \leq u_i \leq u_{i,max}$$

Zielfunktion und Nebenbedingungen (Leistungsflussgleichungen des AC-Netzes) sind nichtlinear!

Es existieren zahlreiche Lösungsverfahren für diese Problemstellung.

Beispiel 7: quadratische Optimierung mit DC-Leistungsfluss

Lösung mit MATLAB:

`[x,fval] = quadprog(H,f,[],[],A,b,xmin,xmax)`

$$\min_x \left\{ \frac{1}{2} \cdot \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{x} \right\}$$

Lösung mit MATPOWER:

`[results, success] = rundcopf(case_skript_BEE)`

mit $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{d}$$

$$\mathbf{x}_{min} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{max}$$

MATPOWER

$$\mathbf{result.x} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ p_{G3} \\ p_{G4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.070669 \\ -0.107760 \\ -0.014043 \\ 0 \\ 0.93333 \\ 0.86666 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.04905^\circ \\ -6.17422^\circ \\ -0.80462^\circ \\ 0 \\ \mathbf{0.93333} \\ \mathbf{0.86666} \end{bmatrix}$$

MATLAB

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} P_{G1} \\ P_{G2} \\ P_{G3} \\ P_{G4} \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.9333 \\ 0.8667 \\ -0.1024 \\ -0.1371 \\ -0.0199 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{0.9333} \\ \mathbf{0.8667} \\ -5.866^\circ \\ -7.858^\circ \\ -1.144^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

Beispiel 7: Optimierung mit AC-Leistungsfluss

Lösung mit MATPOWER:

`[results, success] = runopf(case_skript_BEE)`

`runopf`

$$\text{result.x} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ p_3 \\ p_4 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.071863 \\ -0.107337 \\ -0.016298 \\ 0 \\ 0.94656 \\ 0.91965 \\ 1 \\ 1 \\ 1.01261 \\ 0.8811 \\ 0.04884 \\ -0.28810 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.1174^\circ \\ -6.1499^\circ \\ -0.9338^\circ \\ 0 \\ 0.94656 \\ 0.91965 \\ 1 \\ 1 \\ 1.01261 \\ 0.8811 \\ 0.04884 \\ -0.28810 \end{bmatrix}$$

Ergebnisse Beispiel 5

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ p_3 \\ p_4 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.10761^\circ \\ -6.14205^\circ \\ -0.91675^\circ \\ 0 \\ 0.94653 \\ 0.91968 \\ 1.000028 \\ 1 \\ 1.0150 \\ 0.8787 \\ 0.0477 \\ -0.2870 \end{bmatrix}$$